



Санкт-Петербургский государственный университет
Физический факультет
Кафедра ядерно-физических методов исследования



Сыромятников

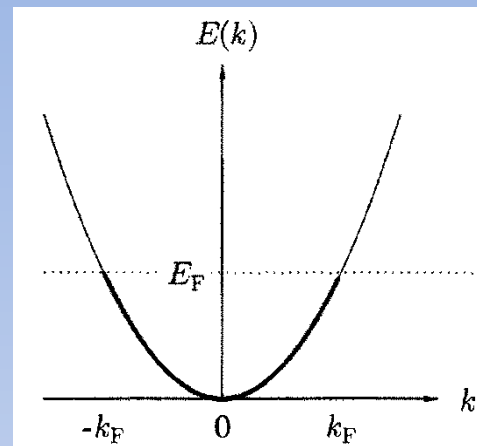
Арсений Владиславович

*Физика магнетизма и
рассеяние поляризованных и
неполяризованных нейтронов*

Лекция 12. Фрустрирующие взаимодействия в магнитных системах и пониженная размерность.

И снова волна спиновой плотности

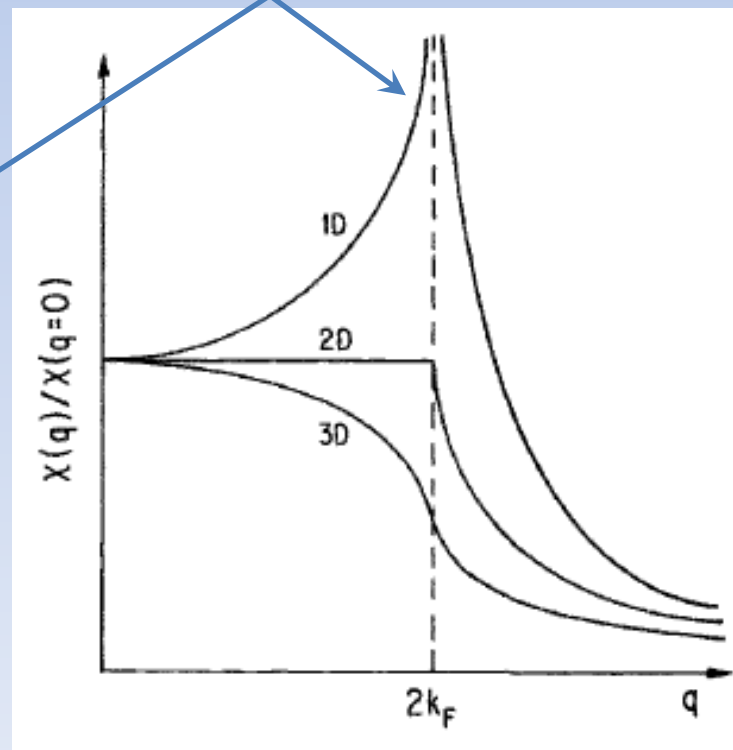
$$\chi_q^{(0)} = \frac{(g\mu_B)^2}{2(2\pi)^3} \int_{k < k_F} d\mathbf{k} \left(\frac{1}{E_{\mathbf{k}+\mathbf{q}} - E_{\mathbf{k}}} + \frac{1}{E_{\mathbf{k}-\mathbf{q}} - E_{\mathbf{k}}} \right)$$



Идеальный нестинг в 1D

Аномалия Кона

$$\chi_q^{(0)} = \begin{cases} \chi_P \left(1 + \frac{4k_F^2 - q^2}{4k_F q} \ln \left| \frac{q + 2k_F}{q - 2k_F} \right| \right) & 3D \\ \chi_P \left(1 - \sqrt{1 - \frac{4k_F^2}{q^2}} \theta(q - 2k_F) \right) & 2D \\ \chi_P \frac{k_F}{q} \ln \left| \frac{q + 2k_F}{q - 2k_F} \right| & 1D \end{cases}$$



Волна спиновой плотности в 1D

$$\chi_{\mathbf{q}}^{(0)} = \frac{(g\mu_B)^2}{2 \cdot 2\pi} \int_{k < k_F} d\mathbf{k} \left(\frac{1}{E_{\mathbf{k}+\mathbf{q}} - E_{\mathbf{k}}} + \frac{1}{E_{\mathbf{k}-\mathbf{q}} - E_{\mathbf{k}}} \right) = \frac{\mu_B^2}{\pi} \int d\mathbf{k} \frac{n_F(E_{\mathbf{k}}) - n_F(E_{\mathbf{k}+\mathbf{q}})}{E_{\mathbf{k}+\mathbf{q}} - E_{\mathbf{k}}}$$

$$q = 2k_F$$

$$E_{\mathbf{k} \approx -\mathbf{k}_F} = \frac{\hbar^2 k^2}{2m} \approx \mu - \hbar v_F (k + k_F)$$

$$E_{\mathbf{k}+\mathbf{q} \approx \mathbf{k}_F} \approx \mu + \hbar v_F (k + k_F)$$

$$n_F(E_{\mathbf{k}}) - n_F(E_{\mathbf{k}+\mathbf{q}}) \approx \frac{1}{e^{-\hbar v_F (k+k_F)/k_B T} + 1} - \frac{1}{e^{\hbar v_F (k+k_F)/k_B T} + 1} = \tanh\left(\frac{\hbar v_F (k + k_F)}{2k_B T}\right)$$

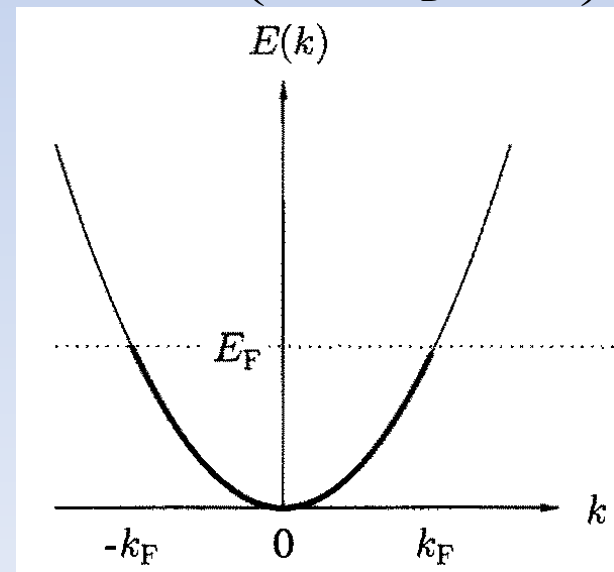
$$\chi_{\mathbf{q}=2\mathbf{k}_F}^{(0)}(T) = \frac{\mu_B^2}{\pi} 2 \int_0^{2k_F} \frac{dx}{2\hbar v_F x} \tanh\left(\frac{\hbar v_F x}{2k_B T}\right)$$

$$= \frac{\mu_B^2}{\pi \hbar v_F} \int_0^{2E_F/k_B T} dx \frac{\tanh(x)}{x} \approx \frac{\mu_B^2}{\pi \hbar v_F} \ln\left(\frac{E_F}{k_B T}\right)$$

$$= \frac{\chi_P}{2} \ln(E_F/k_B T)$$

$$n_F(E) = \frac{1}{e^{(E-\mu)/k_B T} + 1}$$

$$v_F = \frac{\hbar k_F}{m}$$



$$\chi_{\mathbf{q}=2\mathbf{k}_F} = \frac{\chi_{\mathbf{q}=2\mathbf{k}_F}^{(0)}}{1 - \lambda \chi_{\mathbf{q}=2\mathbf{k}_F}^{(0)}} = \frac{\frac{1}{2} \chi_P \ln(E_F/k_B T)}{1 - \frac{1}{2} \lambda \chi_P \ln(E_F/k_B T)}$$

Переход металл-
изолятор

$$\frac{1}{2} \lambda \chi_P \ln\left(\frac{E_F}{k_B T_{SDW}}\right) = 1$$

⇓

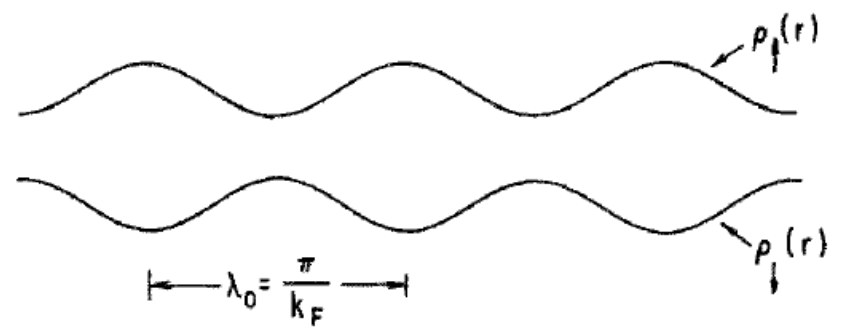
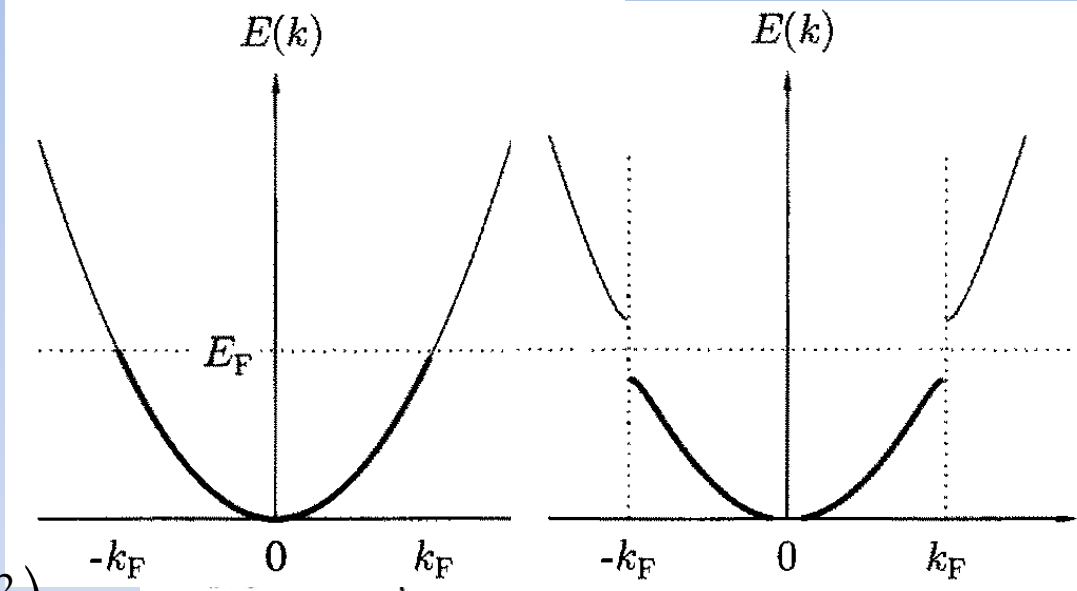
$$k_B T_{SDW} = E_F e^{-2/\lambda \chi_P}$$

$$M(\mathbf{r}) = \rho_{\uparrow}(\mathbf{r}) - \rho_{\downarrow}(\mathbf{r})$$

$$= \sum_{\mathbf{k}} \frac{g\mu_B}{2} \left(|\psi_{\mathbf{k},+}(\mathbf{r})|^2 - |\psi_{\mathbf{k},-}(\mathbf{r})|^2 \right)$$

$$\rho_{\uparrow}(\mathbf{r}) + \rho_{\downarrow}(\mathbf{r}) =$$

$$\sum_{\mathbf{k}} \frac{g\mu_B}{2} \left(|\psi_{\mathbf{k},+}(\mathbf{r})|^2 + |\psi_{\mathbf{k},-}(\mathbf{r})|^2 \right) = const$$



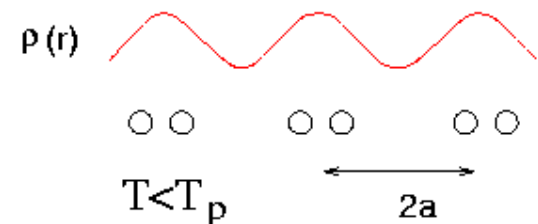
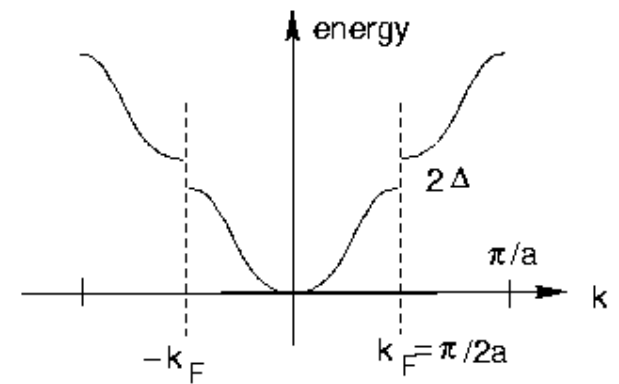
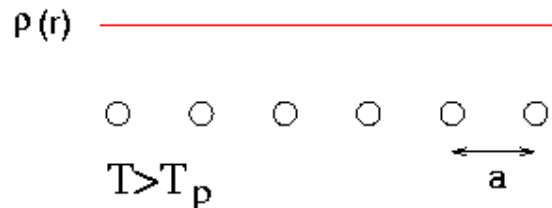
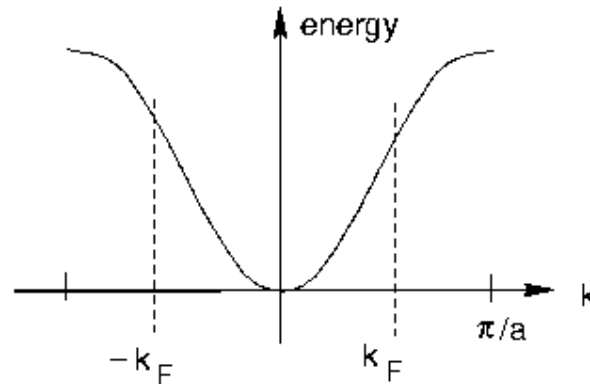
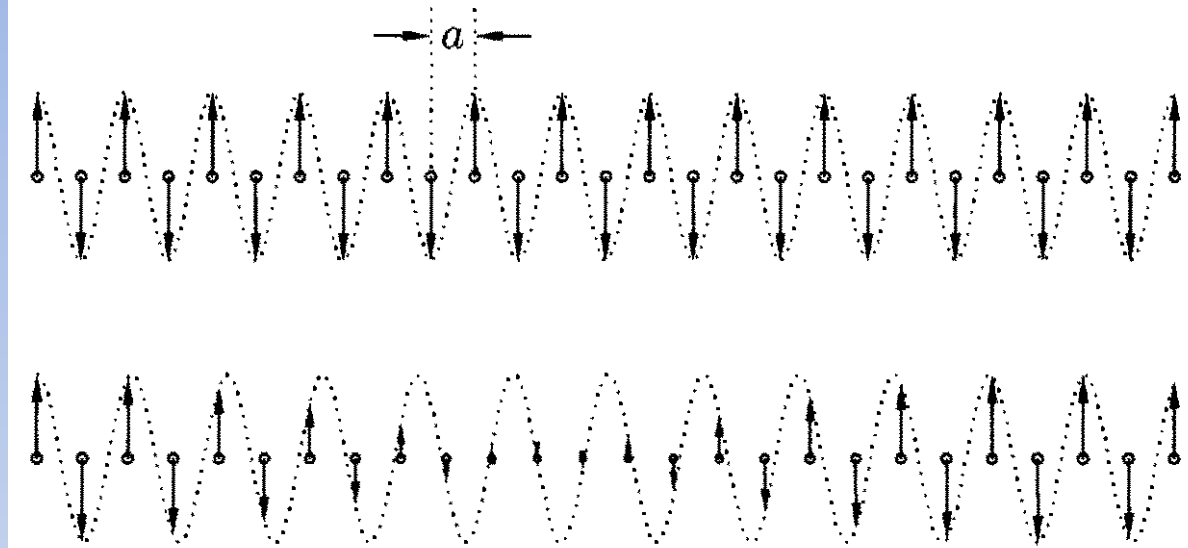
Неустойчивость Пайерлса

Волна спиновой
плотности

Переход металл-
изолятор

Волна
зарядовой
плотности

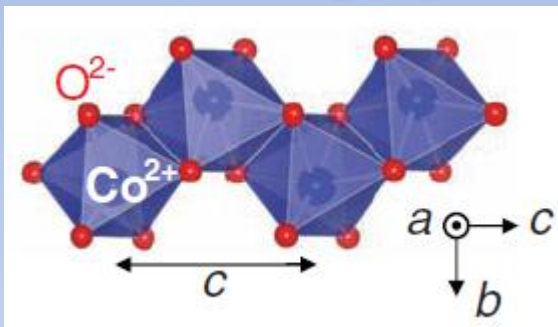
$$k_B T_P = E_F e^{-1/\lambda_{el-ph}}$$



Одномерный ферромагнетик Изинга

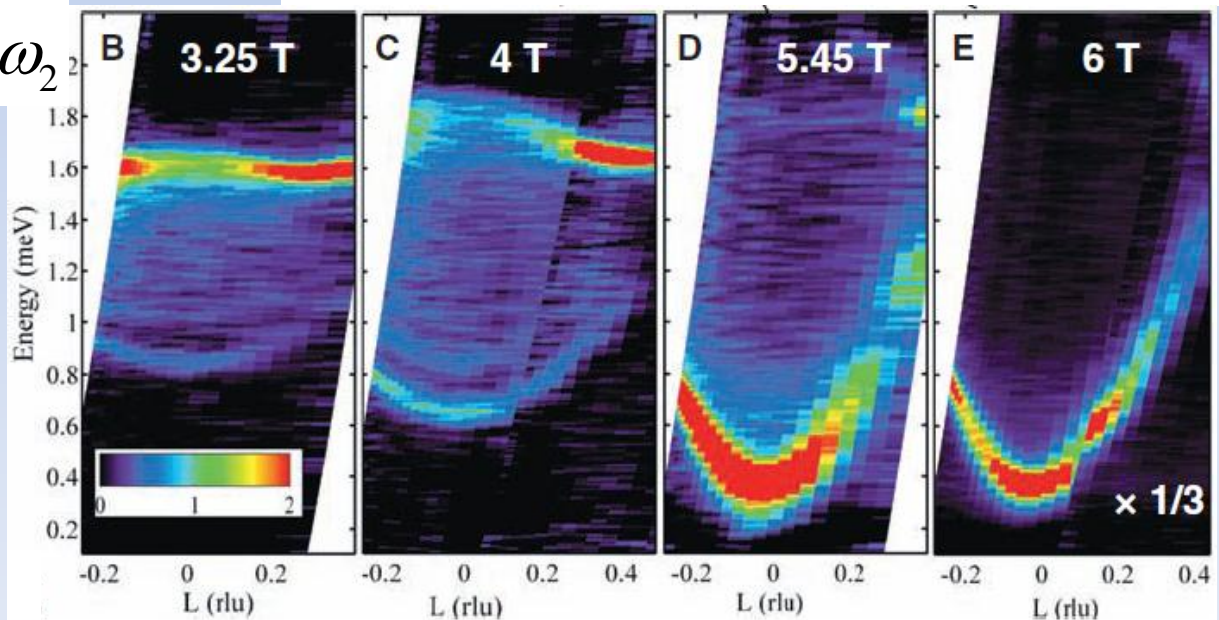
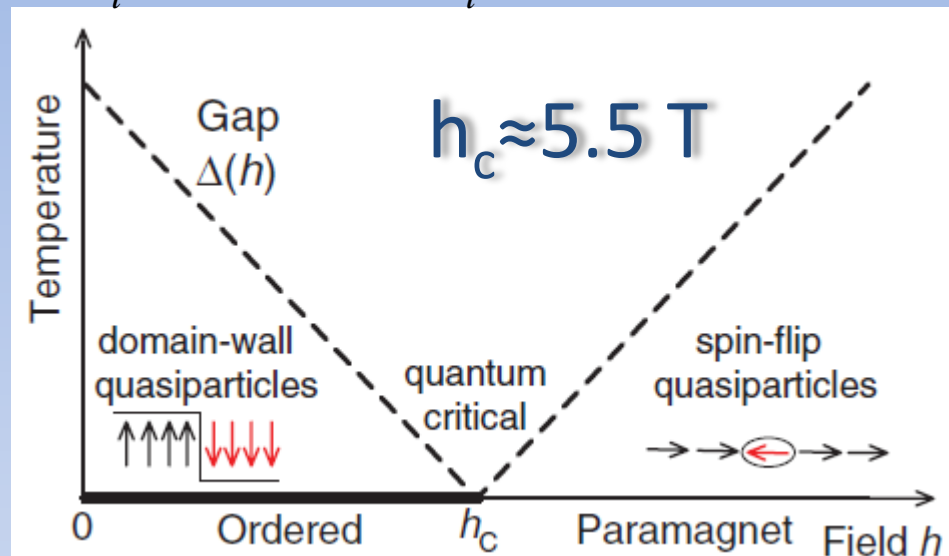
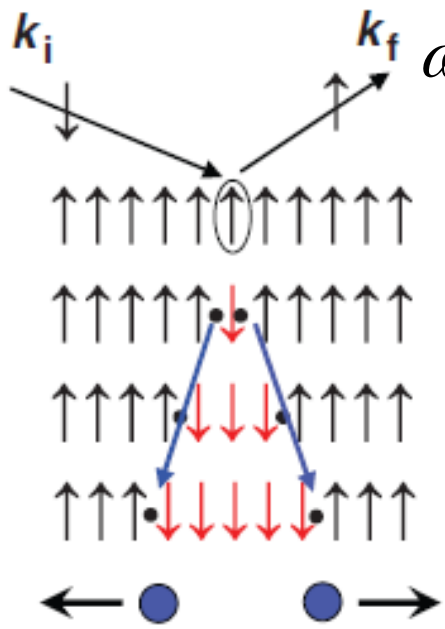
$$\mathcal{H} = -J \sum_i \sigma_i^z \sigma_{i+1}^z - B \sum_i \sigma_i^x = -J \sum_i \sigma_i^z \sigma_{i+1}^z - B \sum_i (\sigma_i^+ + \sigma_i^-)$$

CoNd₂O₆



$$q = q_1 + q_2$$

$$\omega = \omega_1 + \omega_2$$



Одномерный ферромагнетик Изинга

$$\mathcal{H} = -J \sum_{i=1}^N \sigma_i \sigma_{i+1} - \frac{h}{2} \sum_{i=1}^N (\sigma_i + \sigma_{i+1}) \quad N+1 \leftrightarrow 1$$

$$\begin{aligned} \sum_{\sigma_1=\pm 1} \dots \sum_{\sigma_N=\pm 1} \exp(-\mathcal{H}/k_B T) &= \sum_{\sigma_1=\pm 1} \dots \sum_{\sigma_N=\pm 1} \langle \sigma_1 | P | \sigma_2 \rangle \langle \sigma_2 | P | \sigma_3 \rangle \dots \langle \sigma_N | P | \sigma_1 \rangle \\ &= \sum_{\sigma_1=\pm 1} \langle \sigma_1 | P^N | \sigma_1 \rangle = \lambda_+^N + \lambda_-^N \approx \lambda_+^N \end{aligned}$$

$$\langle \sigma | P | \sigma' \rangle = e^{\beta \left(J \sigma \sigma' + \frac{h}{2} (\sigma + \sigma') \right)} \quad P = \begin{pmatrix} e^{\beta(J+h)} & e^{-\beta J} \\ e^{-\beta J} & e^{\beta(J-h)} \end{pmatrix} \quad \beta = \frac{1}{k_B T}$$

$$\det(P - \lambda I) = 0 \quad \lambda_{\pm} = e^{\beta J} \left(\cosh(\beta h) \pm \sqrt{\sinh^2(\beta h) + e^{-4\beta J}} \right)$$

$$F(T) = -\frac{k_B T}{N} \ln(\lambda_+^N) = -J - \frac{1}{\beta} \ln \left(\cosh(\beta h) + \sqrt{\sinh^2(\beta h) + e^{-4\beta J}} \right)$$

$$m(h, T) = -\frac{\partial F(T)}{\partial h} = \frac{\sinh(\beta h)}{\sqrt{\sinh^2(\beta h) + e^{-4\beta J}}} \quad m(h, 0) = -\frac{\partial F(0)}{\partial h} = 1$$

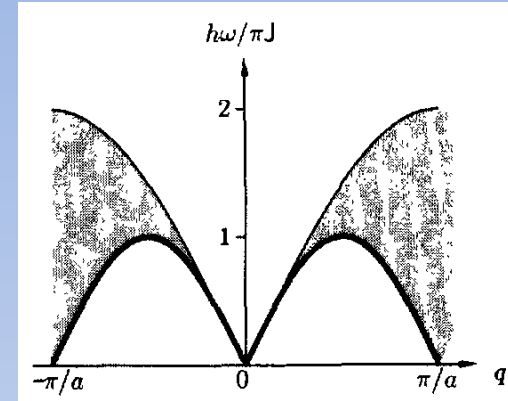
Спиновые цепочки с полуцелым спином

- Анзац Бете

$$\mathcal{H} = J \sum_i \mathbf{S}_i \mathbf{S}_{i+1}$$

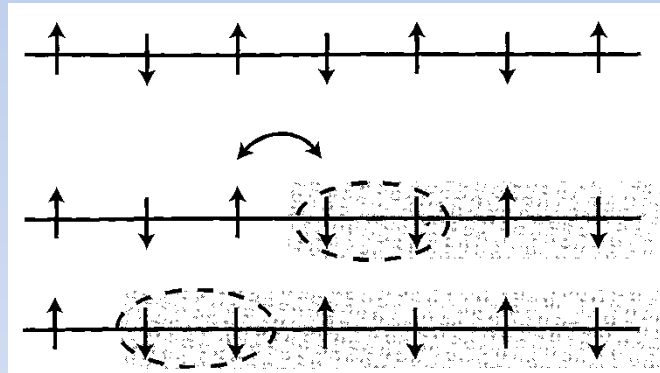
- АФ: теорема Либба-Шульца-Маттиса

$$\langle S_i S_j \rangle \sim \left(\frac{R_0}{R_{ij}} \right)^\alpha$$



спи́нон несет магнитный момент 1/2

$$\hbar\omega = \pi J |\sin(qa)|$$

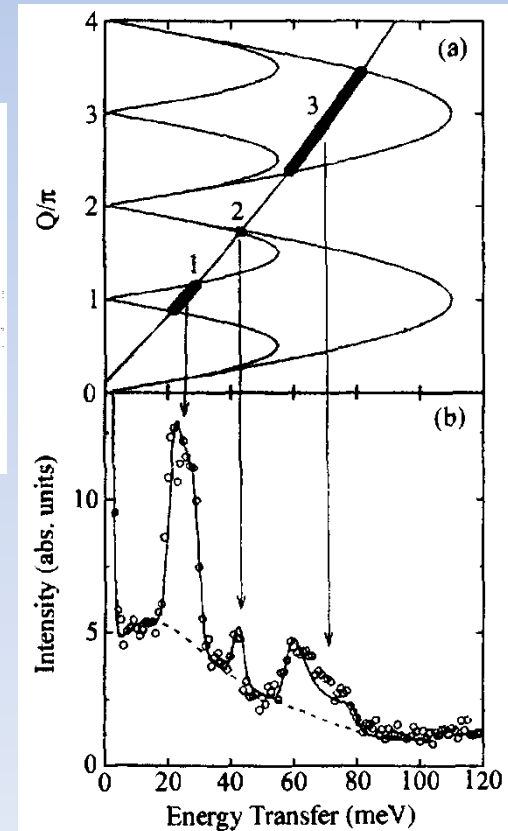
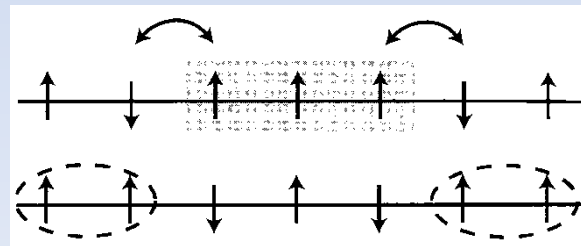


магно́н состоит из двух спи́нонов

$$q = q_1 + q_2$$

$$\omega = \omega_1 + \omega_2$$

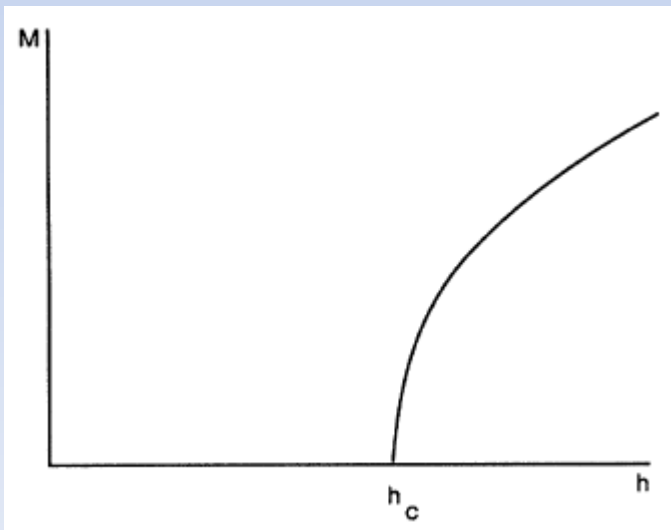
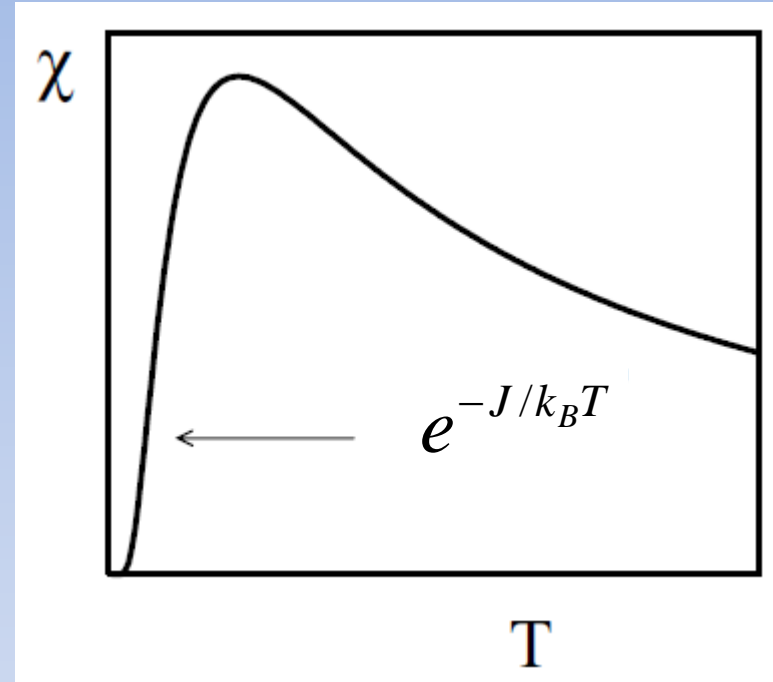
огибающая континуума $2\pi J \left| \sin \frac{qa}{2} \right|$



Спиновые цепочки с целым спином (цепочки Халдейна)

$$\mathcal{H} = J \sum_i \mathbf{S}_i \mathbf{S}_{i+1}$$

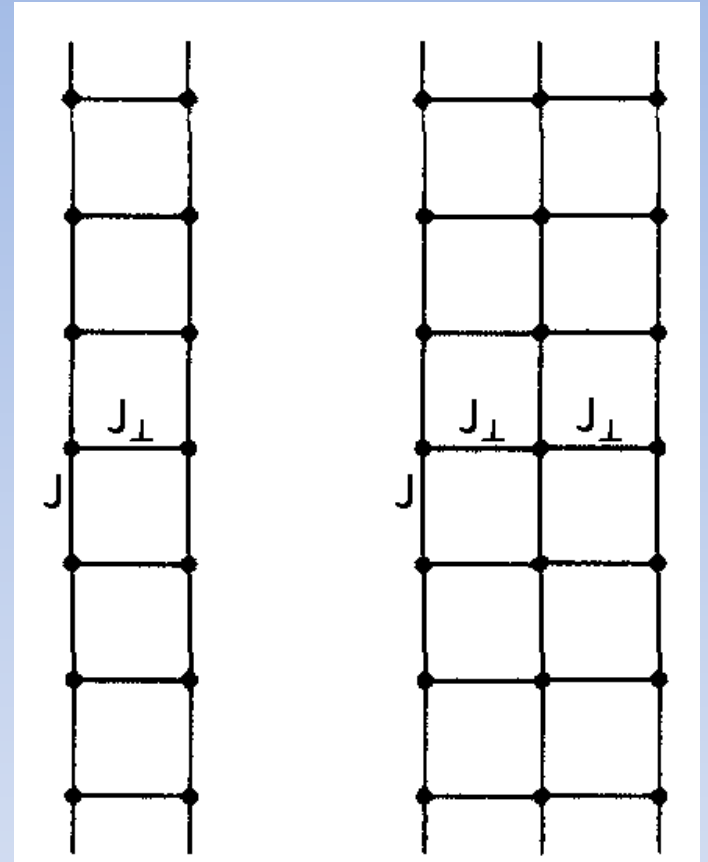
- $\langle \mathbf{S}_j \rangle = 0$
- $\langle S_0^\alpha S_j^\beta \rangle \sim e^{-R_j/\xi}$
- щель в спектре !



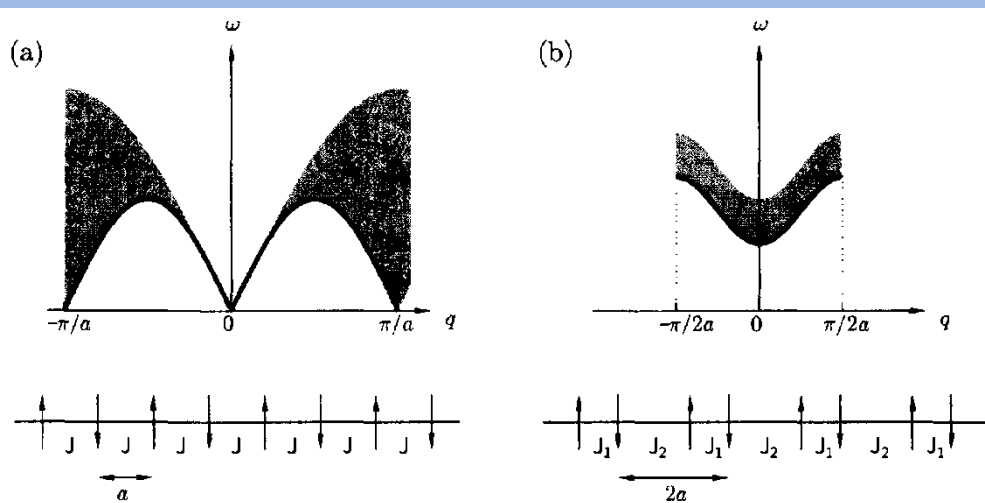
- Синглетное ОС
- Элементарные возбуждения – магноны (спин 1)

АФ спиновые лестницы

- Четное число ног \leftrightarrow
цепочка с целым спином
- Нечетное число ног \leftrightarrow
цепочка с полуцелым
спином



Спиновый переход Пайерлса



$$\mathcal{H} = \frac{1}{2} \sum_{i \neq j} J(\mathbf{R}_{ij}) \mathbf{S}_i \mathbf{S}_j$$

$$J(\mathbf{R}_{ij}) \approx J(\mathbf{R}_{ij}^{(0)}) + (\mathbf{u}_i - \mathbf{u}_j) \nabla J(\mathbf{R}_{ij})$$

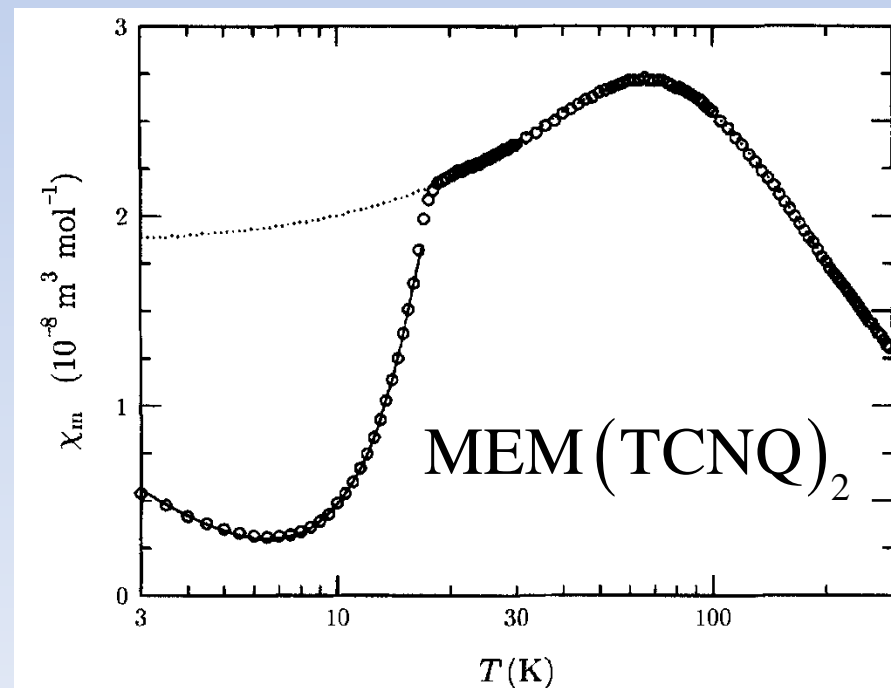
$$k_B T_{SP} = J e^{-1/\lambda_{sp-ph}}$$

$$J \ll E_F \Rightarrow T_{SP} \ll T_P$$

$T < T_{SP}$: синглетное ОС,
элементарные возбуждения –
триплоны (спин 1)

CuGeO_3 ($T_{SP} = 14 \text{ K}$)

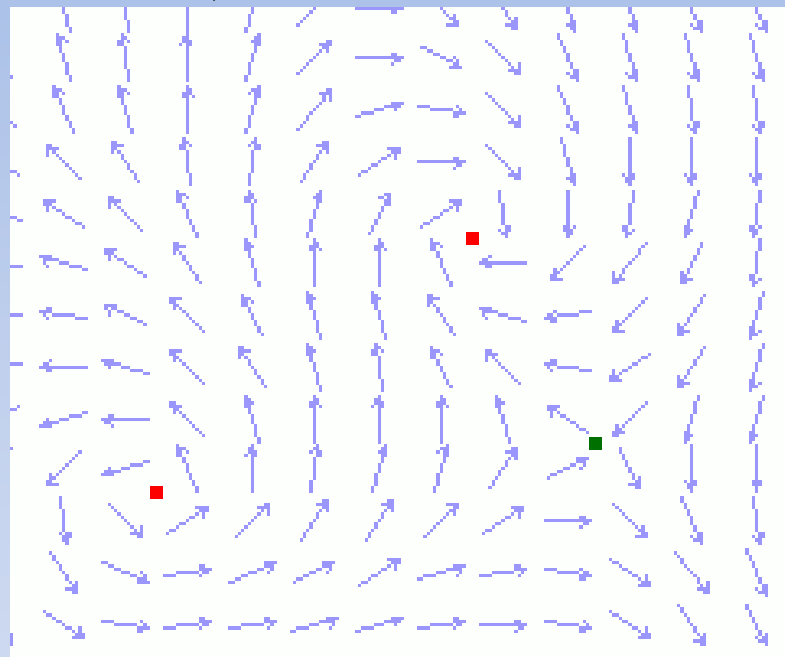
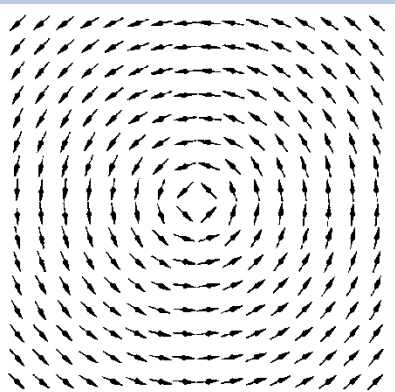
$\text{MEM}(\text{TCNQ})_2$ ($T_{SP} = 18 \text{ K}$)



Переход Березинского-Костерлица-Таулеса в 2D ферромагнетике

$$\mathcal{H} = -\frac{J}{2} \sum_{i \neq j} \mathbf{S}_i \mathbf{S}_j, \quad d = 2, D = 2 \text{ (XY-модель)}$$

$$\langle S_i S_j \rangle \sim \begin{cases} (R_0/R_{ij})^{k_B T / 4\pi J}, & T < T_{BKT} \\ e^{-R_{ij}/\xi}, & T > T_{BKT} \end{cases}$$



$$E - E_0 = 2\pi J \ln(R/a)$$

$$S = k_B \ln(\pi R^2/a^2) \sim 2k_B \ln(R/a)$$

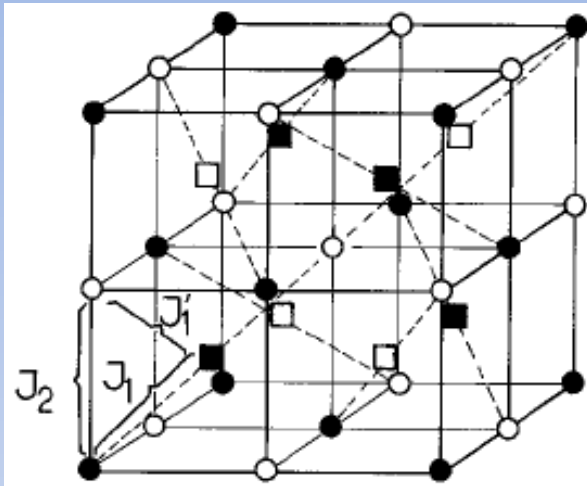
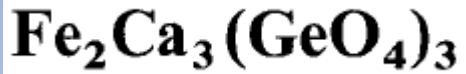
$$F = E - E_0 - TS \quad \Rightarrow \quad T_{BKT} \approx \pi J$$

Топологический
фазовый переход

$$\chi(T) \sim \exp\left(\frac{2.625}{\sqrt{t}}\right)$$

$$t = \frac{T - T_{KT}}{T_{KT}}$$

Явления типа «порядок из беспорядка»

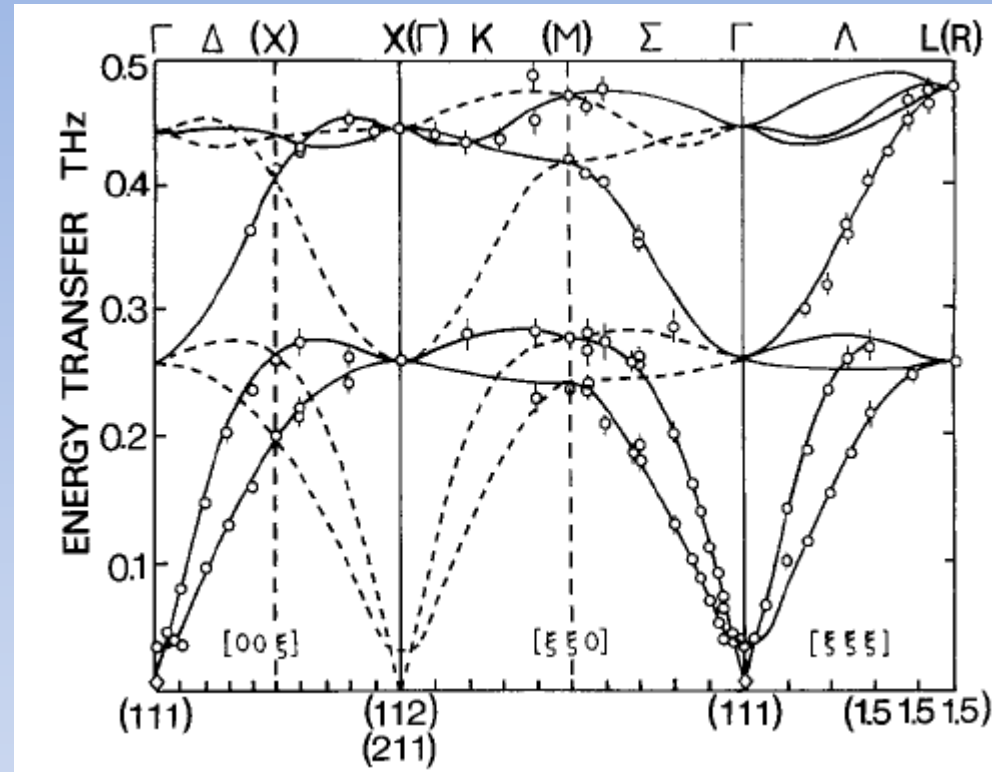


Коллинеарность двух
АФ подрешеток

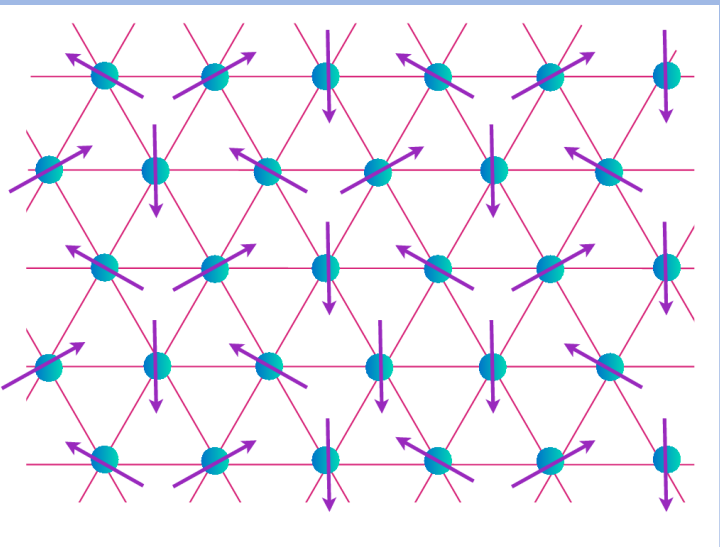
+ щель в одной из веток спектра

К порядку из беспорядка могут приводить как квантовые, так и тепловые флуктуации.

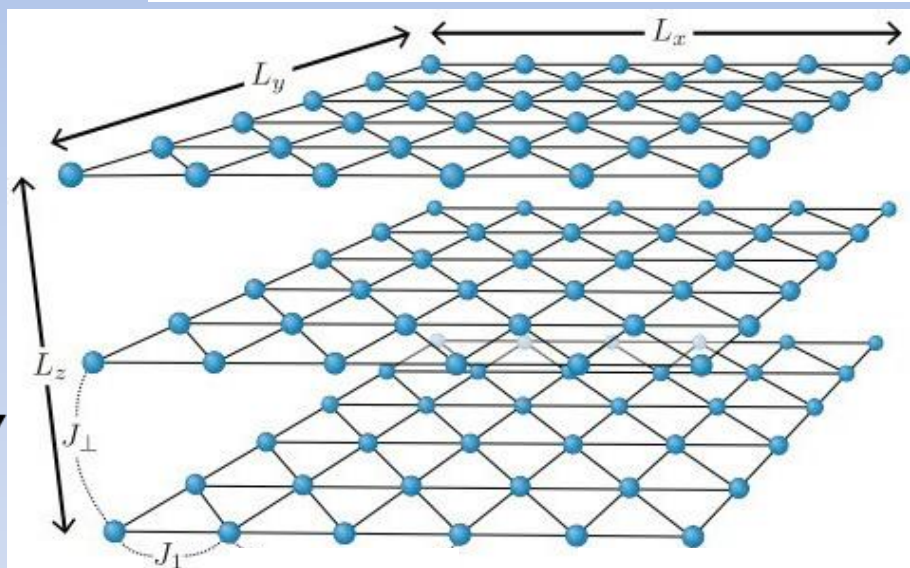
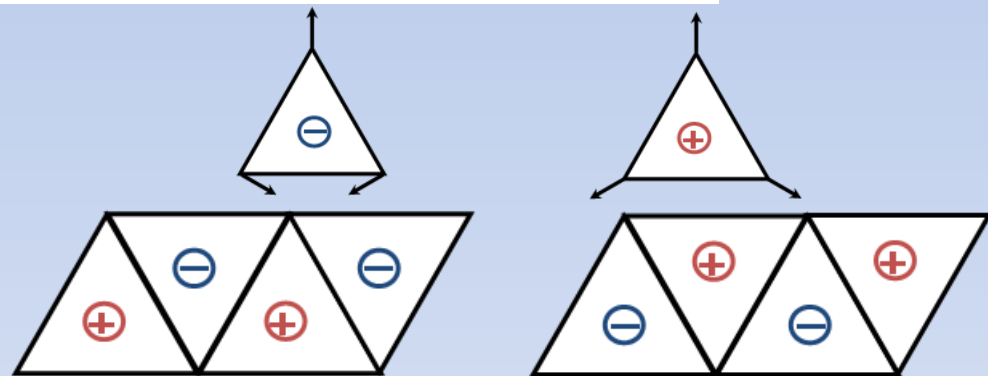
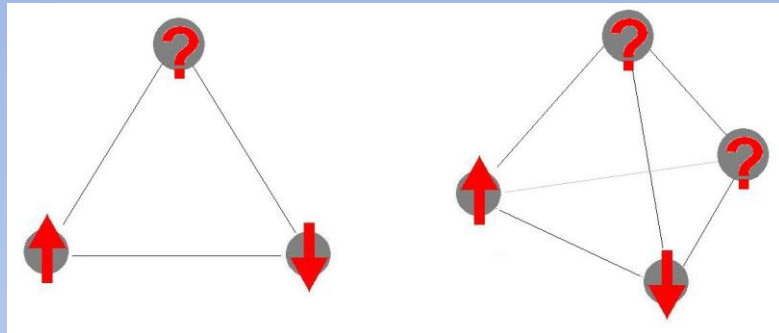
Общие черты: понижение симметрии параметра порядка + щель хотя бы в одной из веток спектра.



Роль фрустрации



$$\mathcal{H} = \frac{J}{2} \sum_{i \neq j} \mathbf{S}_i \mathbf{S}_j$$

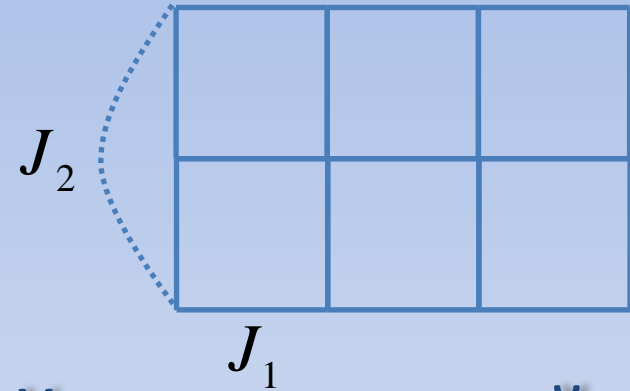


Модель 3D магнетика	Нарушаемая симметрия	ν	β	γ	ν_k	$\beta_k/2$
Коллинеарные	SO(3)/SO(2)	0.706	0.365	1.388	—	—
Спиральные и треугольные	SO(3)	0.59	0.28	1.21	0.60	0.26

Нематический магнитный порядок

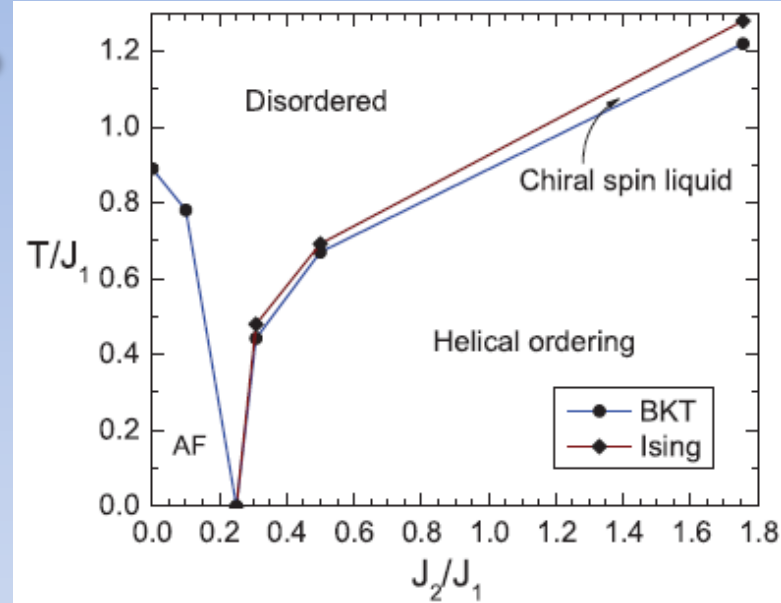
$$\langle \mathbf{S}_j \rangle = 0 \quad Q_{ij}^{\alpha\beta} = \langle S_i^\alpha S_j^\beta \rangle - \delta_{\alpha\beta} \langle \mathbf{S}_i \mathbf{S}_j \rangle / 3$$

Киральная спиновая жидкость



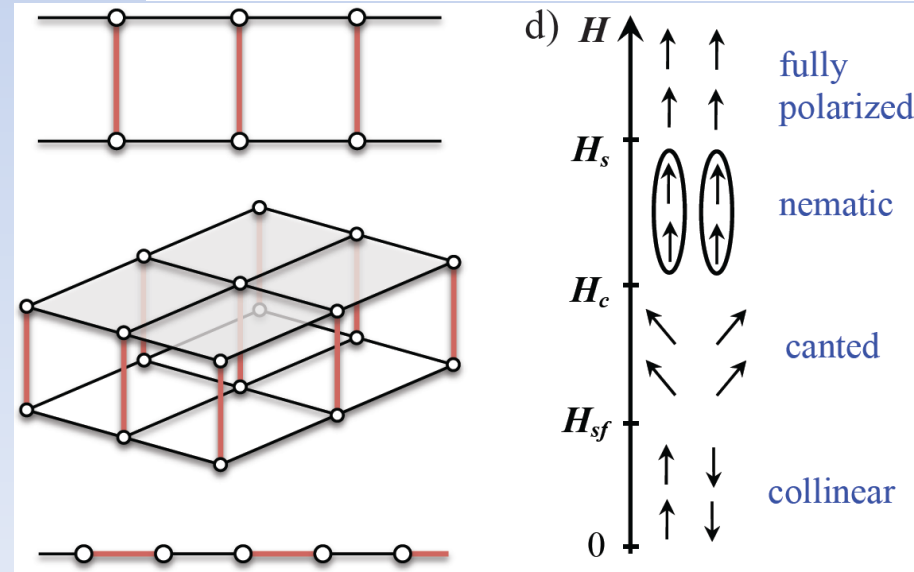
$$\mathcal{H} = \frac{1}{2} \sum_{i,j} J_{ij} \mathbf{S}_i \mathbf{S}_j$$

$$\langle \mathbf{S}_i \times \mathbf{S}_j \rangle \neq 0$$



Квадрупольный порядок

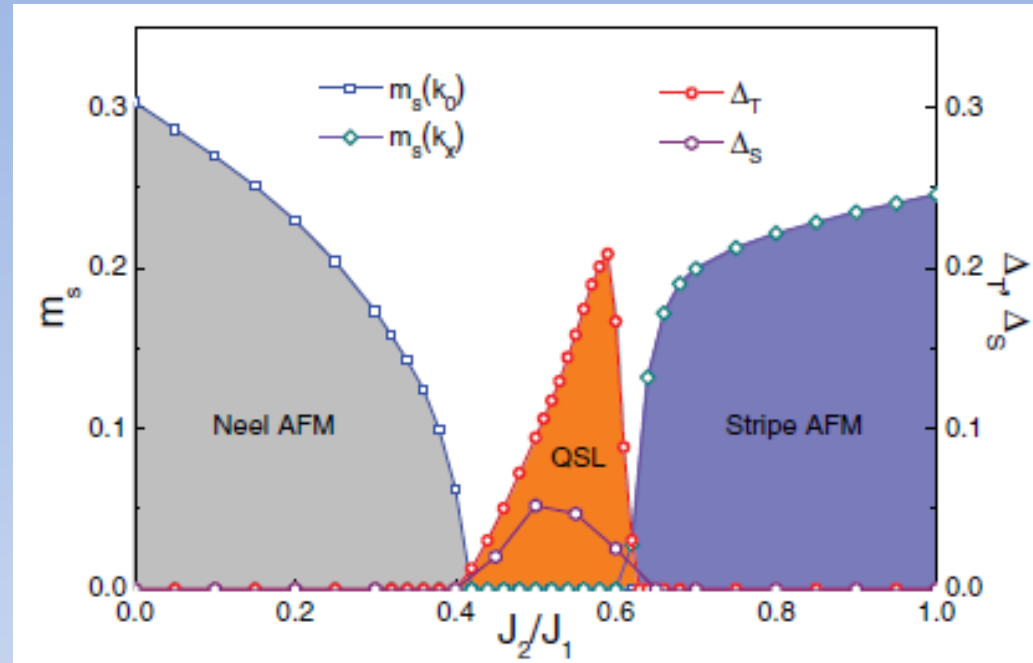
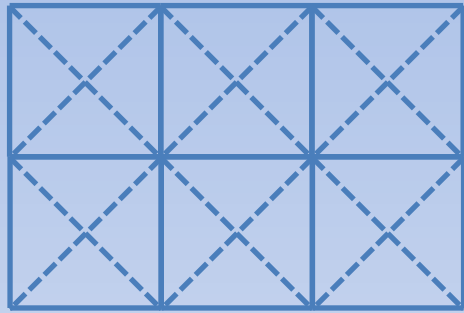
$$\begin{aligned} \mathcal{H} = & J \sum_{\langle i,l \rangle} (\mathbf{S}_{1,i} \mathbf{S}_{1,l} + \mathbf{S}_{2,i} \mathbf{S}_{2,l}) \\ & - j \sum_i \mathbf{S}_{1,i} \mathbf{S}_{2,i} - A \sum_i S_{1,i}^z S_{2,i}^z \\ & - H \sum_i (S_{1,i}^z + S_{2,i}^z) \end{aligned}$$



Снова квантовые спиновые жидкости

$J_1 - J_2$ – модель

$$\mathcal{H} = J_1 \sum_{\langle i,j \rangle} \mathbf{S}_i \cdot \mathbf{S}_j + J_2 \sum_{\langle\langle i,j \rangle\rangle} \mathbf{S}_i \cdot \mathbf{S}_j$$



- Топологическая фаза при $0.4 J_1 < J_2 < 0.6 J_1$ с синглетным ОС и с синглетными же возбужденными уровнями без локального параметра порядка
- Есть ли эквивалентная модель с локальным ПП?

Кагоме-АФ

