Санкт-Петербургский государственный университет
Физический факультет
Кафедра ядерно-физических методов исследования

Сыромятников
Арсений Владиславович

Лекция 12. Анализ поляризации при рассеянии нейтронов.

- *Описание нейтронной поляризации*
- *Величины, измеряемые в экспериментах с поляризованными нейтронами*
- *Выражения для сечения рассеяния пол. нейтронов*

Описание нейтронной поляризации

$$\mathbf{s} = \frac{\hbar}{2}\boldsymbol{\sigma} \qquad \sigma_z = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \qquad \sigma_x = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \qquad \sigma_y = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}$$

$$\psi_u(\mathbf{r}) = e^{i\mathbf{kr}} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \psi_d(\mathbf{r}) = e^{i\mathbf{kr}} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\psi(\mathbf{r}) = e^{i\mathbf{kr}} \left(c_u \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + c_d \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right) \qquad |c_u|^2 + |c_d|^2 = 1$$

$$\langle \psi(\mathbf{r}) | \sigma_z | \psi(\mathbf{r}) \rangle = \left(c_u^* \begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix} + c_d^* \begin{pmatrix} 0 & 1 \end{pmatrix} \right) \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \left(c_u \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + c_d \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$$

$$= \left(c_u^* \begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix} + c_d^* \begin{pmatrix} 0 & 1 \end{pmatrix} \right) \left(c_u \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} - c_d \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right) = |c_u|^2 - |c_d|^2$$

Описание нейтронной поляризации

$$\langle\psi(\mathbf{r})|\sigma_z|\psi(\mathbf{r})\rangle = |c_u|^2 - |c_d|^2$$

$$\langle\psi(\mathbf{r})|\sigma_x|\psi(\mathbf{r})\rangle = c_u^* c_d + c_u c_d^*$$

$$\langle\psi(\mathbf{r})|\sigma_y|\psi(\mathbf{r})\rangle = -i\left(c_u^* c_d - c_u c_d^*\right)$$

$$\langle\psi(\mathbf{r})|\sigma_z|\psi(\mathbf{r})\rangle^2 + \langle\psi(\mathbf{r})|\sigma_x|\psi(\mathbf{r})\rangle^2 + \langle\psi(\mathbf{r})|\sigma_y|\psi(\mathbf{r})\rangle^2 = 1$$

Из источника выходят неполяризованные нейтроны:

$$\langle\sigma_z\rangle = \langle\sigma_x\rangle = \langle\sigma_y\rangle = 0$$

$$\mathbf{P} = \langle\boldsymbol{\sigma}\rangle \qquad P < 1$$

Это смешанное состояние, которое описывается матрицей плотности ρ

Описание нейтронной поляризации

$$\langle A\rangle = \sum_{n,m}\rho_{nm}A_{mn} = \sum_{n}(\rho A)_{nn} = Tr(\rho A)$$

$$Tr(\rho) = 1$$

$$\mathbf{P} = \langle\boldsymbol{\sigma}\rangle = Tr(\rho\boldsymbol{\sigma})$$

$$\sigma_z^2 = \sigma_x^2 = \sigma_y^2 = I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\sigma_k\sigma_j = \delta_{kj}I + i\varepsilon_{kjn}\sigma_n \qquad k, j, n = x, y, z$$

$$\sigma_k\sigma_j - \sigma_j\sigma_k = 2i\varepsilon_{kjn}\sigma_n$$

$$\rho = \frac{1}{2}\left(I + P_x\sigma_x + P_y\sigma_y + P_z\sigma_z\right) = \frac{1}{2}(I + \mathbf{P}\boldsymbol{\sigma})$$

Свойства вектора поляризации

P — t-нечетный аксиальный вектор

момент количества движения $\mathbf{L}=[\mathbf{r}\times\mathbf{k}]$

$\mathbf{r} \;\to\; -\mathbf{r} \qquad\qquad \mathbf{L} \;\to\; \mathbf{L}, \qquad \mathbf{P} \;\to\; \mathbf{P}$

$t \;\to\; -t \qquad\qquad \mathbf{L} \;\to\; -\mathbf{L}, \qquad \mathbf{P} \;\to\; -\mathbf{P}$

в сечении может появиться член, зависящий от поляризации, только если система характеризуется t-нечетным аксиальным вектором **A**

$$\frac{d^2\sigma}{d\Omega dE} \sim A^{\alpha} B_{\alpha\beta} P_0^{\beta} \qquad\qquad \mathbf{P}\frac{d^2\sigma}{d\Omega dE} \sim \mathbf{A}$$

Вектор поляризации во внешнем магнитном поле

$$\boldsymbol{\mu}_n = \mu_n \boldsymbol{\sigma} \qquad \mu_n = \gamma \frac{|e|\hbar}{2m_p c} < 0 \qquad \gamma = -1.91$$

$$V(\mathbf{r}) = -\boldsymbol{\mu}_n \mathbf{B}(\mathbf{r})$$

$$\frac{d\boldsymbol{\sigma}}{dt} = \frac{i}{\hbar}\left(V(\mathbf{r})\boldsymbol{\sigma} - \boldsymbol{\sigma}V(\mathbf{r})\right) = -\mu_n \frac{i}{\hbar}\left(\left(\boldsymbol{\sigma}\mathbf{B}(\mathbf{r})\right)\boldsymbol{\sigma} - \boldsymbol{\sigma}\left(\boldsymbol{\sigma}\mathbf{B}(\mathbf{r})\right)\right)$$

$$\left(\boldsymbol{\sigma}\mathbf{B}(\mathbf{r})\right)\sigma_k - \sigma_k\left(\boldsymbol{\sigma}\mathbf{B}(\mathbf{r})\right) = \sum_j \left(\sigma_j B_j(\mathbf{r})\sigma_k - \sigma_k \sigma_j B_j(\mathbf{r})\right)$$

$$= \sum_j B_j(\mathbf{r})\left(\sigma_j \sigma_k - \sigma_k \sigma_j\right) = \sum_j B_j(\mathbf{r}) 2i\varepsilon_{jkn}\sigma_n = -2i\left[\mathbf{B}(\mathbf{r}) \times \boldsymbol{\sigma}\right]_k$$

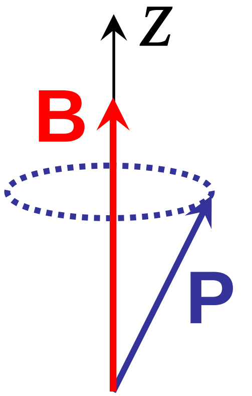
$$\frac{d\boldsymbol{\sigma}}{dt} = -\frac{2\mu_n}{\hbar}\left[\mathbf{B}(\mathbf{r}) \times \boldsymbol{\sigma}\right] \quad \Rightarrow \quad \boxed{\frac{d\mathbf{P}}{dt} = -\frac{2\mu_n}{\hbar}\left[\mathbf{B}(\mathbf{r}) \times \mathbf{P}\right]}$$

Вектор поляризации во внешнем магнитном поле

$$\frac{d\mathbf{P}}{dt} = -\frac{2\mu_n}{\hbar}\left[\mathbf{B}(\mathbf{r})\times\mathbf{P}\right]$$

$$\frac{d\mathbf{P}^2}{dt} = 2\mathbf{P}\frac{d\mathbf{P}}{dt} = -\frac{4\mu_n}{\hbar}\mathbf{P}\left[\mathbf{B}(\mathbf{r})\times\mathbf{P}\right] = 0 \quad \Rightarrow \quad \boxed{P = \mathrm{const}}$$

$$\frac{d\mathbf{P}}{dt} = \omega_L\left[\mathbf{e}_z\times\mathbf{P}\right] = \omega_L\begin{vmatrix}\mathbf{e}_x & \mathbf{e}_y & \mathbf{e}_z\\ 0 & 0 & 1\\ P_x & P_y & P_z\end{vmatrix} \qquad \omega_L = \frac{2|\mu_n|B}{\hbar}$$



$$\frac{dP_x}{dt} = -\omega_L P_y \qquad \frac{dP_y}{dt} = \omega_L P_x \qquad \frac{dP_z}{dt} = 0$$

$$\boxed{P_x = P_\perp\cos\left(\omega_L t+\varphi\right) \qquad P_y = P_\perp\sin\left(\omega_L t+\varphi\right) \qquad P_z = P_\parallel}$$

Величины, измеряемые в экспериментах с поляризованными нейтронами

$$\frac{d^2\sigma}{d\Omega dE} = \sigma_0\left(\mathbf{Q},\omega\right) + \mathbf{P}_0\boldsymbol{\Theta}\left(\mathbf{Q},\omega\right)$$

$$\mathbf{P}\frac{d^2\sigma}{d\Omega dE} = \mathbf{F}\left(\mathbf{Q},\omega\right) + \mathrm{R}\left(\mathbf{Q},\omega\right)\mathbf{P}_0$$

$$\left(\mathrm{R}\left(\mathbf{Q},\omega\right)\mathbf{P}_0\right)_\alpha = \mathrm{R}_{\alpha\beta}\left(\mathbf{Q},\omega\right)P_0^\beta \qquad \mathrm{R}_{\alpha\beta}\left(\mathbf{Q},\omega\right) = \mathrm{R}_{\beta\alpha}\left(\mathbf{Q},\omega\right)$$

Величины, измеряемые в экспериментах с поляризованными нейтронами

$$\sigma_{\uparrow\uparrow}(\mathbf{Q},\omega),\ \sigma_{\downarrow\downarrow}(\mathbf{Q},\omega)$$

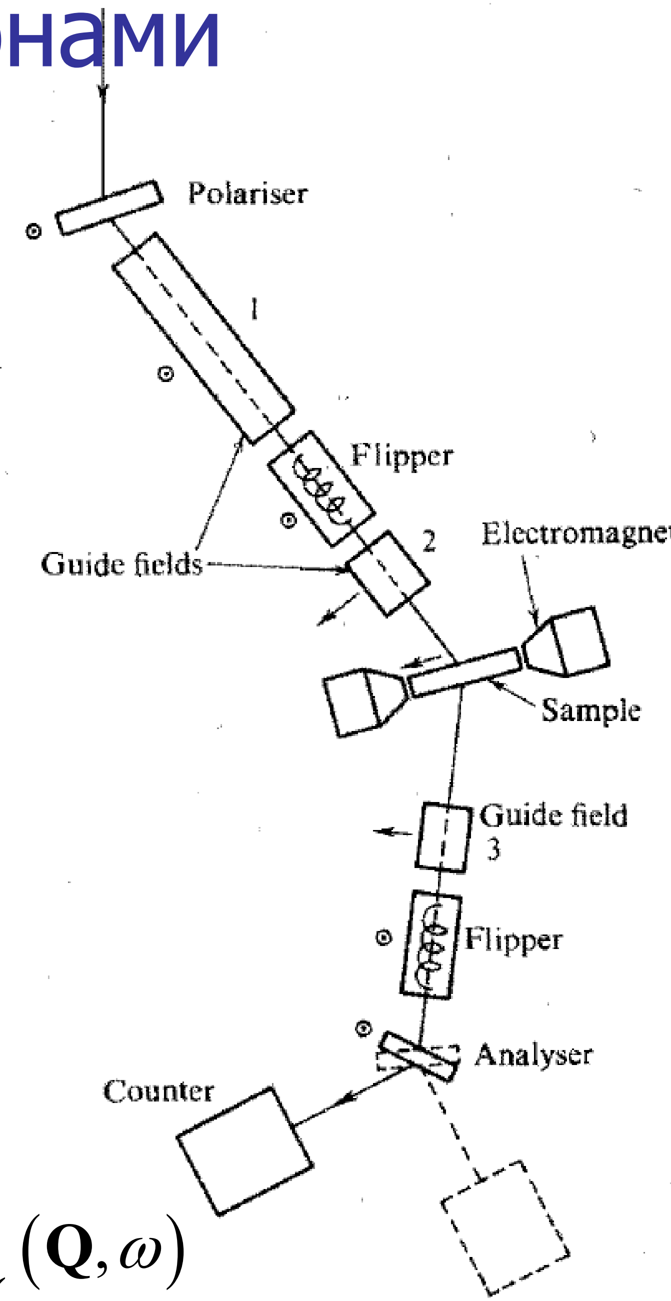
$$\sigma_{\uparrow\downarrow}(\mathbf{Q},\omega),\ \sigma_{\downarrow\uparrow}(\mathbf{Q},\omega)$$

$$\sigma_0=\frac{1}{2}\left(\left(\sigma_{\uparrow\uparrow}+\sigma_{\uparrow\downarrow}\right)+\left(\sigma_{\downarrow\downarrow}+\sigma_{\downarrow\uparrow}\right)\right)$$

$$=\frac{\sigma_{\uparrow\uparrow}+\sigma_{\downarrow\downarrow}}{2}+\frac{\sigma_{\uparrow\downarrow}+\sigma_{\downarrow\uparrow}}{2}$$

$$\Theta_z=\frac{\sigma_{\uparrow\downarrow}-\sigma_{\downarrow\uparrow}}{2}$$

$$R_{zz}=\frac{\sigma_{\uparrow\uparrow}+\sigma_{\downarrow\downarrow}}{2}-\frac{\sigma_{\uparrow\downarrow}+\sigma_{\downarrow\uparrow}}{2}$$



$$\sigma_{\uparrow\uparrow}(\mathbf{Q},\omega)\approx\sigma_{\downarrow\downarrow}(\mathbf{Q},\omega)$$

Когерентное и некогерентное рассеяние поляризованных нейтронов

$$\text{Спин ядра } I + \text{спин нейтрона } \frac{1}{2} \rightarrow \begin{cases} I+1/2 \rightarrow b^{+} \\ I-1/2 \rightarrow b^{-} \end{cases}$$

$$\left(\frac{d^2\sigma}{dE_f\, d\Omega_f}\right)_{\sigma_i\alpha\rightarrow\sigma_f\beta} = \frac{k_f}{k_i}\left|\sum_j \left\langle \beta\sigma_f \left| \hat{b}_j e^{i\mathbf{QR}_j} \right| \alpha\sigma_i \right\rangle\right|^2 \delta\left(E_\alpha - E_\beta + \hbar\omega\right)$$

$$\hat{b}\left|+\right\rangle = b^{+}\left|+\right\rangle \qquad \hat{b}\left|-\right\rangle = b^{-}\left|-\right\rangle$$

$$\mathbf{S} = \mathbf{I} + \frac{1}{2}\boldsymbol{\sigma}$$

$$\mathbf{S}^2 = \mathbf{I}^2 + \frac{1}{4}\boldsymbol{\sigma}^2 + \mathbf{I}\boldsymbol{\sigma} \quad \Rightarrow \quad \mathbf{I}\boldsymbol{\sigma} = S\left(S+1\right) - I\left(I+1\right) - \frac{3}{4}$$

Когерентное и некогерентное рассеяние поляризованных нейтронов

$$\mathbf{I\sigma} = S(S+1) - I(I+1) - \frac{3}{4}$$

$$\mathbf{I\sigma}|+\rangle = \left(\left(I+\frac{1}{2}\right)\left(I+\frac{3}{2}\right) - I(I+1) - \frac{3}{4}\right)|+\rangle = I|+\rangle$$

$$\mathbf{I\sigma}|-\rangle = \left(\left(I-\frac{1}{2}\right)\left(I+\frac{1}{2}\right) - I(I+1) - \frac{3}{4}\right)|-\rangle = -(I+1)|-\rangle$$

$$\boxed{\hat{b} = A + B\mathbf{I\sigma}}$$

$$\left.\begin{aligned} \hat{b}|+\rangle &= (A+BI)|+\rangle = b^{+}|+\rangle \\ \hat{b}|-\rangle &= (A-(I+1)B)|-\rangle = b^{-}|-\rangle \end{aligned}\right\} \Rightarrow \boxed{\begin{aligned} A &= \frac{(I+1)b^{+} + Ib^{-}}{2I+1} \\ B &= \frac{b^{+} - b^{-}}{2I+1} \end{aligned}}$$

Когерентное и некогерентное рассеяние поляризованных нейтронов

$$\hat{b} = A + B\mathbf{I}\boldsymbol{\sigma} = A + B\left(I_z\sigma_z + \frac{1}{2}\left(I^+\sigma^- + I^-\sigma^+\right)\right)$$

$$\left\langle \beta\sigma_f \left| \hat{b}_j e^{i\mathbf{QR}_j} \right| \alpha\sigma_i \right\rangle = \left\langle \beta \left| e^{i\mathbf{QR}_j} \left\langle \sigma_f \left| \hat{b}_j \right| \sigma_i \right\rangle \right| \alpha \right\rangle$$

$$\left.\begin{aligned} \hat{b}\left|\uparrow\right\rangle &= \left(A + BI_z\right)\left|\uparrow\right\rangle + BI^+\left|\downarrow\right\rangle \\ \hat{b}\left|\downarrow\right\rangle &= \left(A - BI_z\right)\left|\downarrow\right\rangle + BI^-\left|\uparrow\right\rangle \end{aligned}\right\} \Rightarrow \begin{aligned} \left\langle\uparrow\left|\hat{b}\right|\uparrow\right\rangle &= A + BI_z \\ \left\langle\downarrow\left|\hat{b}\right|\downarrow\right\rangle &= A - BI_z \\ \left\langle\uparrow\left|\hat{b}\right|\downarrow\right\rangle &= BI^- \\ \left\langle\downarrow\left|\hat{b}\right|\uparrow\right\rangle &= BI^+ \end{aligned}$$

Когерентное рассеяние поляризованных нейтронов

$$\overline{I_z} = \overline{I_x} = \overline{I_y} = 0$$

$$\left(\frac{d^2\sigma}{dE_f d\Omega_f}\right)_{\text{coh}} \sim \sum_{j\neq l} \overline{\langle \sigma_f | \hat{b}_j | \sigma_i \rangle \langle \sigma_i | \hat{b}_l | \sigma_f \rangle} \sim \sum_{j\neq l} \overline{\langle \sigma_f | \hat{b}_j | \sigma_i \rangle} \cdot \overline{\langle \sigma_i | \hat{b}_l | \sigma_f \rangle}$$

$$\overline{\langle \uparrow | \hat{b}_j | \uparrow \rangle} = \overline{\left(A + BI_j^z\right)} = A = \langle A \rangle_{iso}$$

$$\overline{\langle \downarrow | \hat{b}_j | \downarrow \rangle} = \overline{\left(A - BI_j^z\right)} = A = \langle A \rangle_{iso}$$

При наличии разных изотопов

$$\overline{\langle \uparrow | \hat{b}_j | \downarrow \rangle} = \overline{BI_j^-} = 0$$

$$\overline{\langle \downarrow | \hat{b}_j | \uparrow \rangle} = 0$$

$$\langle A \rangle_{iso} = \langle \overline{b} \rangle_{iso} = \sum_a c_a \frac{(I_a + 1) b_a^+ + I_a b_a^-}{2I_a + 1}$$

Некогерентное рассеяние поляризованных нейтронов

$$\overline{I_z} = \overline{I_x} = \overline{I_y} = 0 \qquad \overline{I_z^2} = \overline{I_x^2} = \overline{I_y^2} = \frac{1}{3}\mathbf{I}^2 = \frac{1}{3} I\left(I+1\right)$$

$$\left(\frac{d^2\sigma}{dE_f d\Omega_f}\right)_{\text{inc}} \sim \sum_j \left(\overline{\left\langle \sigma_f \left| \hat{b}_j \right| \sigma_i \right\rangle \left\langle \sigma_i \left| \hat{b}_j \right| \sigma_f \right\rangle} - \overline{\left\langle \sigma_f \left| \hat{b}_j \right| \sigma_i \right\rangle}^2 \right)$$

$$\overline{\left\langle \uparrow \left| \hat{b} \right| \uparrow \right\rangle^2} = \overline{\left(A + BI_z\right)^2} = A^2 + B^2 \overline{I_z^2} + 2AB\overline{I_z} = A^2 + B^2 \frac{1}{3} I\left(I+1\right)$$

$$= \left\langle A^2 \right\rangle_{iso} + \frac{1}{3} \left\langle B^2 I\left(I+1\right)\right\rangle_{iso}$$

$$\overline{\left\langle \uparrow \left| \hat{b} \right| \uparrow \right\rangle^2} - \overline{\left\langle \uparrow \left| \hat{b} \right| \uparrow \right\rangle}^2 = \overline{\left\langle \downarrow \left| \hat{b} \right| \downarrow \right\rangle^2} - \overline{\left\langle \downarrow \left| \hat{b} \right| \downarrow \right\rangle}^2$$

$$= \left\langle A^2 \right\rangle_{iso} - \left\langle A \right\rangle_{iso}^2 + \frac{1}{3} \left\langle B^2 I\left(I+1\right)\right\rangle_{iso}$$

$$\overline{\left\langle \uparrow \left| \hat{b} \right| \downarrow \right\rangle \left\langle \downarrow \left| \hat{b} \right| \uparrow \right\rangle} = \overline{BI^- BI^+} = B^2 \overline{\left(I\left(I+1\right) - I_z - I_z^2\right)} = \frac{2}{3} \left\langle B^2 I\left(I+1\right)\right\rangle_{iso}$$

Некогерентное рассеяние поляризованных нейтронов

$$\sigma_{NSF} \propto \left\langle A^2 \right\rangle_{iso} - \left\langle A \right\rangle_{iso}^2 + \frac{1}{3} \left\langle B^2 I\left(I+1\right) \right\rangle_{iso} \qquad \sigma_{SF} \propto \frac{2}{3} \left\langle B^2 I\left(I+1\right) \right\rangle_{iso}$$