



Санкт-Петербургский государственный университет  
Физический факультет  
Кафедра ядерно-физических методов исследования



Сыромятников

Арсений Владиславович

*Лекция 9. Основы теории  
магнитного рассеяния нейтронов.*

- Магнитное рассеяние при наличии спинового и орбитального вкладов*
- Магнитное рассеяние в парамагнетике*
- Упругое магнитное рассеяние в ферромагнетике*

# Магнитное рассеяние при наличии спинового и орбитального вкладов

$$QR \ll 1$$

$$F(\mathbf{Q}) \rightarrow \frac{1}{2} g F(\mathbf{Q}) = \frac{1}{2} g_S \mathcal{J}_0 + \frac{1}{2} g_L (\mathcal{J}_0 + \mathcal{J}_2)$$

$$\mathbf{S}_j \rightarrow \mathbf{J}_j$$

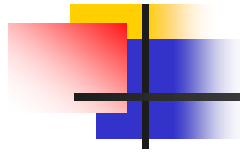
$$g_S = 1 + \frac{S(S+1) - L(L+1)}{J(J+1)}$$

$g = g_S + g_L$   
фактор Ланде

$$g_L = \frac{1}{2} + \frac{L(L+1) - S(S+1)}{2J(J+1)}$$

$$\mathcal{J}_n = 4\pi \int_0^{\infty} \mathfrak{s}(r) j_n(Qr) r^2 dr$$

# Выражение для сечения магнитного рассеяния через корр. функции



$$\delta(E_\alpha + E_i - E_\beta - E_f) = \frac{1}{2\pi\hbar} \int_{-\infty}^{\infty} e^{i(E_\beta - E_\alpha)t/\hbar} e^{-i\omega t} dt$$

$$e^{iHt/\hbar} |\alpha\rangle = e^{iE_\alpha t/\hbar} |\alpha\rangle$$

$$\sum_{\alpha\beta} P_\alpha \langle \alpha | e^{-i\mathbf{Q}\mathbf{R}_{l'd'}} S_{l'd'}^\chi | \beta \rangle \langle \beta | e^{i\mathbf{Q}\mathbf{R}_{ld}} S_{ld}^\eta | \alpha \rangle \delta(E_\alpha - E_\beta + \hbar\omega)$$

$$= \sum_{\alpha\beta} P_\alpha \langle \alpha | e^{-i\mathbf{Q}\mathbf{R}_{l'd'}} S_{l'd'}^\chi | \beta \rangle \langle \beta | e^{i\mathbf{Q}\mathbf{R}_{ld}} S_{ld}^\eta | \alpha \rangle \frac{1}{2\pi\hbar} \int_{-\infty}^{\infty} e^{i(E_\beta - E_\alpha)t/\hbar} e^{-i\omega t} dt$$

$$= \frac{1}{2\pi\hbar} \int_{-\infty}^{\infty} \sum_{\alpha\beta} P_\alpha \langle \alpha | e^{-i\mathbf{Q}\mathbf{R}_{l'd'}} S_{l'd'}^\chi | \beta \rangle \langle \beta | e^{iHt/\hbar} e^{i\mathbf{Q}\mathbf{R}_{ld}} e^{-iHt/\hbar} e^{iHt/\hbar} S_{ld}^\eta e^{-iHt/\hbar} | \alpha \rangle e^{-i\omega t} dt$$

$$= \frac{1}{2\pi\hbar} \int_{-\infty}^{\infty} \sum_{\alpha\beta} P_\alpha \langle \alpha | e^{-i\mathbf{Q}\mathbf{R}_{l'd'}} S_{l'd'}^\chi | \beta \rangle \langle \beta | e^{i\mathbf{Q}\mathbf{R}_{ld}(t)} S_{ld}^\eta(t) | \alpha \rangle e^{-i\omega t} dt$$

$$= \frac{1}{2\pi\hbar} \int_{-\infty}^{\infty} \langle e^{-i\mathbf{Q}\mathbf{R}_{l'd'}(0)} S_{l'd'}^\chi(0) e^{i\mathbf{Q}\mathbf{R}_{ld}(t)} S_{ld}^\eta(t) \rangle e^{-i\omega t} dt$$

# Выражение для сечения магнитного рассеяния через корр. функции

$$\frac{1}{2\pi\hbar} \int_{-\infty}^{\infty} \left\langle e^{-i\mathbf{Q}\mathbf{R}_{l'd'}(0)} S_{l'd'}^{\chi}(0) e^{i\mathbf{Q}\mathbf{R}_{ld}(t)} S_{ld}^{\eta}(t) \right\rangle e^{-i\omega t} dt$$

$$= \frac{1}{2\pi\hbar} \int_{-\infty}^{\infty} \left\langle e^{-i\mathbf{Q}\mathbf{R}_{l'd'}(0)} e^{i\mathbf{Q}\mathbf{R}_{ld}(t)} \right\rangle \left\langle S_{l'd'}^{\chi}(0) S_{ld}^{\eta}(t) \right\rangle e^{-i\omega t} dt$$

$$\frac{d^2\sigma}{dE_f d\Omega_f} = \frac{(\gamma r_0)^2}{2\pi\hbar} \frac{k_f}{k_i} \sum_{\chi\eta} \left( \delta_{\chi\eta} - \hat{Q}^{\eta} \hat{Q}^{\chi} \right) \sum_{l'd'} \sum_{ld} F_{d'}^*(\mathbf{Q}) F_d(\mathbf{Q})$$

$$\times \int_{-\infty}^{\infty} \left\langle e^{-i\mathbf{Q}\mathbf{R}_{l'd'}(0)} e^{i\mathbf{Q}\mathbf{R}_{ld}(t)} \right\rangle \left\langle S_{l'd'}^{\chi}(0) S_{ld}^{\eta}(t) \right\rangle e^{-i\omega t} dt$$

$$\frac{d^2\sigma}{dE_f d\Omega_f} = \frac{(\gamma r_0)^2}{2\pi\hbar} \frac{k_f}{k_i} |F(\mathbf{Q})|^2 N \sum_{\chi\eta} \left( \delta_{\chi\eta} - \hat{Q}^{\eta} \hat{Q}^{\chi} \right) \sum_l e^{i\mathbf{Q}\mathbf{R}_l^{(0)}}$$

$$\times \int_{-\infty}^{\infty} \left\langle e^{-i\mathbf{Q}\mathbf{u}_0(0)} e^{i\mathbf{Q}\mathbf{u}_l(t)} \right\rangle \left\langle S_0^{\chi}(0) S_l^{\eta}(t) \right\rangle e^{-i\omega t} dt$$

# Выражение для сечения магнитного рассеяния через корр. функции

$$I_l(\mathbf{Q}, t) = \langle e^{-i\mathbf{Q}\mathbf{u}_0(0)} e^{i\mathbf{Q}\mathbf{u}_l(t)} \rangle \quad J_l^{\chi\eta}(\mathbf{Q}, t) = \langle S_0^\chi(0) S_l^\eta(t) \rangle$$

$$I_l(\mathbf{Q}, t) = I_l(\mathbf{Q}, \infty) + I'_l(\mathbf{Q}, t) \quad J_l^{\chi\eta}(\mathbf{Q}, t) = J_l^{\chi\eta}(\mathbf{Q}, \infty) + J'_l{}^{\chi\eta}(\mathbf{Q}, t)$$

$$\frac{d^2\sigma}{dE_f d\Omega_f} = \frac{(\gamma r_0)^2}{2\pi\hbar} \frac{k_f}{k_i} |F(\mathbf{Q})|^2 N \sum_{\chi\eta} \left( \delta_{\chi\eta} - \hat{Q}^\eta \hat{Q}^\chi \right) \sum_l e^{i\mathbf{Q}\mathbf{R}_l} \\ \times \int_{-\infty}^{\infty} \left( I_l(\mathbf{Q}, \infty) + I'_l(\mathbf{Q}, t) \right) \left( J_l^{\chi\eta}(\mathbf{Q}, \infty) + J'_l{}^{\chi\eta}(\mathbf{Q}, t) \right) e^{-i\omega t} dt \\ \left( I_l(\mathbf{Q}, \infty) + I'_l(\mathbf{Q}, t) \right) \left( J_l^{\chi\eta}(\mathbf{Q}, \infty) + J'_l{}^{\chi\eta}(\mathbf{Q}, t) \right)$$

упругий

магнетоколебательный

$$= I_l(\mathbf{Q}, \infty) J_l^{\chi\eta}(\mathbf{Q}, \infty) + I'_l(\mathbf{Q}, t) J_l^{\chi\eta}(\mathbf{Q}, \infty) \\ + I_l(\mathbf{Q}, \infty) J'_l{}^{\chi\eta}(\mathbf{Q}, t) + I'_l(\mathbf{Q}, t) J'_l{}^{\chi\eta}(\mathbf{Q}, t)$$

# Магнетоколебательный член в сечении ферромагнетика

$$I_l'(\mathbf{Q}, t) J_l^{\chi\eta}(\mathbf{Q}, \infty)$$

$$J_l^{\chi\eta}(\mathbf{Q}, \infty) = \langle S_0^\chi \rangle \langle S_l^\eta \rangle = \delta_{\chi z} \delta_{\eta z} \langle S^z \rangle^2$$

$$\frac{\sigma_{coh}}{4\pi} \rightarrow (\gamma r_0)^2 |F(\mathbf{Q})|^2 \left(1 - (\hat{Q}^z)^2\right) \langle S^z \rangle^2$$

# Общее выражение для сечения упругого магнитного рассеяния

$$\frac{d^2\sigma}{dE_f d\Omega_f} = \frac{(\gamma r_0)^2}{2\pi\hbar} \frac{k_f}{k_i} \sum_{\chi\eta} (\delta_{\chi\eta} - \hat{Q}^\eta \hat{Q}^\chi) \int_{-\infty}^{\infty} \langle Y^\chi(-\mathbf{Q}, 0) Y^\eta(\mathbf{Q}, t) \rangle e^{-i\omega t} dt$$

$$\langle Y^\chi(-\mathbf{Q}, 0) Y^\eta(\mathbf{Q}, t) \rangle = \langle Y^\chi(-\mathbf{Q}, 0) Y^\eta(\mathbf{Q}, \infty) \rangle + \langle Y^\chi(-\mathbf{Q}, 0) Y^\eta(\mathbf{Q}, t) \rangle'$$

$$\left( \frac{d\sigma}{d\Omega_f} \right)_{el} = (\gamma r_0)^2 \sum_{\chi\eta} (\delta_{\chi\eta} - \hat{Q}^\eta \hat{Q}^\chi) \langle Y^\chi(-\mathbf{Q}) \rangle \langle Y^\eta(\mathbf{Q}) \rangle$$

$$\mathbf{Y}(\mathbf{Q}) = -\frac{1}{2\mu_B} \mathbf{M}(\mathbf{Q})$$

$$\left( \frac{d\sigma}{d\Omega_f} \right)_{el} = \left( \frac{\gamma r_0}{2\mu_B} \right)^2 \sum_{\chi\eta} (\delta_{\chi\eta} - \hat{Q}^\eta \hat{Q}^\chi) \langle M^\chi(-\mathbf{Q}) \rangle \langle M^\eta(\mathbf{Q}) \rangle$$

$$\left( \frac{d\sigma}{d\Omega_f} \right)_{el} = \left( \frac{\gamma r_0}{2\mu_B} \right)^2 \left\| \hat{\mathbf{Q}} \times \left[ \langle \mathbf{M}(\mathbf{Q}) \rangle \times \hat{\mathbf{Q}} \right] \right\|^2$$

# Магнитное рассеяние в парамагнетике при $\mathbf{V}=0$

$$\langle S_0^\chi(0) S_l^\eta(t) \rangle = \langle S_0^\chi S_l^\eta \rangle = \begin{cases} \langle S_0^\chi \rangle \langle S_l^\eta \rangle = 0, & l \neq 0 \\ \langle S_0^\chi S_0^\eta \rangle = \delta_{\chi\eta} \langle (S_0^\chi)^2 \rangle = \delta_{\chi\eta} \frac{1}{3} \langle \mathbf{S}^2 \rangle \end{cases}$$

$$\frac{d^2\sigma}{dE_f d\Omega_f} = \frac{(\gamma r_0)^2}{2\pi\hbar} \frac{k_f}{k_i} |F(\mathbf{Q})|^2 N \sum_{\chi\eta} \left( \delta_{\chi\eta} - \hat{Q}^\eta \hat{Q}^\chi \right) \sum_l e^{i\mathbf{Q}\mathbf{R}_l} \times \langle S_0^\chi S_l^\eta \rangle \int_{-\infty}^{\infty} \langle e^{-i\mathbf{Q}\mathbf{u}_0(0)} e^{i\mathbf{Q}\mathbf{u}_l(t)} \rangle e^{-i\omega t} dt$$

$$\left( \frac{d\sigma}{d\Omega_f} \right)_{el} = (\gamma r_0)^2 |F(\mathbf{Q})|^2 e^{-2W} \sum_{\chi\eta} \left( \delta_{\chi\eta} - \hat{Q}^\eta \hat{Q}^\chi \right) N \sum_l e^{i\mathbf{Q}\mathbf{R}_l^{(0)}} \langle S_0^\chi S_l^\eta \rangle$$



# Магнитное рассеяние в парамагнетике при $\mathbf{B}=0$

$$\begin{aligned} \left( \frac{d\sigma}{d\Omega_f} \right)_{el} &= (\gamma r_0)^2 |F(\mathbf{Q})|^2 e^{-2W} N \sum_{\chi\eta} \left( \delta_{\chi\eta} - \hat{Q}^\eta \hat{Q}^\chi \right) \delta_{\chi\eta} \frac{S(S+1)}{3} \\ &= (\gamma r_0)^2 |F(\mathbf{Q})|^2 e^{-2W} N \sum_{\chi\eta} \left( \delta_{\chi\eta} - (\hat{Q}^\eta)^2 \delta_{\chi\eta} \right) \frac{S(S+1)}{3} \\ &= (\gamma r_0)^2 |F(\mathbf{Q})|^2 e^{-2W} N \frac{S(S+1)}{3} \left( 3 - (\hat{\mathbf{Q}})^2 \right) \\ &= (\gamma r_0)^2 |F(\mathbf{Q})|^2 e^{-2W} N \frac{2S(S+1)}{3} \end{aligned}$$

# Магнитное рассеяние в парамагнетике при $\mathbf{B} \neq 0$

$$\frac{d^2\sigma}{dE_f d\Omega_f} = (\gamma r_0)^2 \frac{k_f}{k_i} \sum_{\chi\eta} \left( \delta_{\chi\eta} - \hat{Q}^\eta \hat{Q}^\chi \right) \sum_{l'd'} \sum_{ld} F_{d'}^*(\mathbf{Q}) F_d(\mathbf{Q})$$

$$\times \sum_{\alpha\beta} P_\alpha \left\langle \alpha \left| e^{-i\mathbf{Q}\mathbf{R}_{l'd'}} S_{l'd'}^\chi \right| \beta \right\rangle \left\langle \beta \left| e^{i\mathbf{Q}\mathbf{R}_{ld}} S_{ld}^\eta \right| \alpha \right\rangle \delta(E_\alpha - E_\beta + \hbar\omega)$$

$$\langle S_0^\chi(0) S_l^\eta(t) \rangle \approx \langle S_0^\chi S_l^\eta \rangle \quad \langle S_0^x S_l^y \rangle = \langle S_0^x S_l^z \rangle = \langle S_0^y S_l^z \rangle = 0$$

a)  $l \neq 0$

$$\langle S_0^\chi S_l^\eta \rangle = \delta_{\chi z} \delta_{\eta z} \langle S^z \rangle^2 \quad \frac{S(S+1) g \mu_B B}{3 k_B T}$$

$$\langle S^z \rangle = \frac{\sum_{m=-S}^S m e^{\frac{mg\mu_B B}{k_B T}}}{\sum_{m=-S}^S e^{\frac{mg\mu_B B}{k_B T}}} = \left( S + \frac{1}{2} \right) \coth \left( \left( S + \frac{1}{2} \right) \frac{g \mu_B B}{k_B T} \right) - \frac{1}{2} \coth \left( \frac{g \mu_B B}{2k_B T} \right)$$

# Магнитное рассеяние в парамагнетике при $\mathbf{V} \neq 0$

b)  $l = 0$

$$\langle S_0^\chi S_0^\eta \rangle = (\delta_{\chi y} \delta_{\eta y} + \delta_{\chi x} \delta_{\eta x}) \frac{1}{2} \left( S(S+1) - \langle (S^z)^2 \rangle \right) + \delta_{\chi z} \delta_{\eta z} \langle (S^z)^2 \rangle$$

$$\langle (S^z)^2 \rangle = \frac{\sum_{m=-S}^S m^2 e^{\frac{mg\mu_B B}{k_B T}}}{\sum_{m=-S}^S e^{\frac{mg\mu_B B}{k_B T}}} = S(S+1) - \coth \left( \frac{g\mu_B B}{2k_B T} \right) \langle S^z \rangle$$

$$\sum_l e^{i\mathbf{Q}\mathbf{R}_l} \langle S_0^\chi S_l^\eta \rangle = \sum_{l \neq 0} e^{i\mathbf{Q}\mathbf{R}_l} \langle S_0^\chi S_l^\eta \rangle + \langle S_0^\chi S_0^\eta \rangle$$

$$= \sum_{l \neq 0} e^{i\mathbf{Q}\mathbf{R}_l} \delta_{\chi z} \delta_{\eta z} \langle S^z \rangle^2 + \langle S_0^\chi S_0^\eta \rangle$$

$$= \sum_l e^{i\mathbf{Q}\mathbf{R}_l} \delta_{\chi z} \delta_{\eta z} \langle S^z \rangle^2 + \langle S_0^\chi S_0^\eta \rangle - \delta_{\chi z} \delta_{\eta z} \langle S^z \rangle^2$$

# Магнитное рассеяние в парамагнетике при $\mathbf{B} \neq 0$

$$\begin{aligned}
 \sum_l e^{i\mathbf{Q}\mathbf{R}_l} \langle S_0^\chi S_l^\eta \rangle &= \sum_l e^{i\mathbf{Q}\mathbf{R}_l} \delta_{\chi z} \delta_{\eta z} \langle S^z \rangle^2 + \langle S_0^\chi S_0^\eta \rangle - \delta_{\chi z} \delta_{\eta z} \langle S^z \rangle^2 \\
 &= \delta_{\chi z} \delta_{\eta z} \langle S^z \rangle^2 \frac{(2\pi)^3}{V_0} \sum_{\boldsymbol{\tau}} \delta(\mathbf{Q} + \boldsymbol{\tau}) \\
 &+ \left( \delta_{\chi y} \delta_{\eta y} + \delta_{\chi x} \delta_{\eta x} \right) \frac{1}{2} \left( S(S+1) - \langle (S^z)^2 \rangle \right) + \delta_{\chi z} \delta_{\eta z} \left( \langle (S^z)^2 \rangle - \langle S^z \rangle^2 \right) \\
 \sum_{\chi\eta} \left( \delta_{\chi\eta} - \hat{Q}^\eta \hat{Q}^\chi \right) \sum_l e^{i\mathbf{Q}\mathbf{R}_l} \langle S_0^\chi S_l^\eta \rangle &= \left( 1 - (\hat{Q}^z)^2 \right) \langle S^z \rangle^2 \frac{(2\pi)^3}{V_0} \sum_{\boldsymbol{\tau}} \delta(\mathbf{Q} + \boldsymbol{\tau}) \\
 &+ \left( 2 - (\hat{Q}^y)^2 - (\hat{Q}^x)^2 \right) \frac{1}{2} \left( S(S+1) - \langle (S^z)^2 \rangle \right) \\
 &+ \left( 1 - (\hat{Q}^z)^2 \right) \left( \langle (S^z)^2 \rangle - \langle S^z \rangle^2 \right)
 \end{aligned}$$

# Магнитное рассеяние в парамагнетике при $\mathbf{B} \neq 0$

$$\begin{aligned}
 & \left(1 - (\hat{Q}^z)^2\right) \langle S^z \rangle^2 \frac{(2\pi)^3}{V_0} \sum_{\boldsymbol{\tau}} \delta(\mathbf{Q} + \boldsymbol{\tau}) \\
 & + \left(1 + (\hat{Q}^z)^2\right) \frac{1}{2} \left( S(S+1) - \langle (S^z)^2 \rangle \right) + \left(1 - (\hat{Q}^z)^2\right) \left( \langle (S^z)^2 \rangle - \langle S^z \rangle^2 \right) \\
 & = \left(1 - (\hat{Q}^z)^2\right) \langle S^z \rangle^2 \frac{(2\pi)^3}{V_0} \sum_{\boldsymbol{\tau}} \delta(\mathbf{Q} + \boldsymbol{\tau}) \\
 & + (\hat{Q}^z)^2 \left( \frac{1}{2} S(S+1) - \frac{3}{2} \langle (S^z)^2 \rangle + \langle S^z \rangle^2 \right) \\
 & + \left( \frac{1}{2} S(S+1) + \frac{1}{2} \langle (S^z)^2 \rangle - \langle S^z \rangle^2 \right)
 \end{aligned}$$

# Магнитное рассеяние в парамагнетике при $\mathbf{B} \neq 0$

$$\begin{aligned}
 \left( \frac{d\sigma}{d\Omega_f} \right)_{el} &= (\gamma r_0)^2 |F(\mathbf{Q})|^2 e^{-2W} N \\
 &\times \left( \left( 1 - (\hat{Q}^z)^2 \right) \langle S^z \rangle^2 \frac{(2\pi)^3}{V_0} \sum_{\boldsymbol{\tau}} \delta(\mathbf{Q} + \boldsymbol{\tau}) \right. \\
 &+ (\hat{Q}^z)^2 \left( \frac{1}{2} S(S+1) - \frac{3}{2} \langle (S^z)^2 \rangle + \langle S^z \rangle^2 \right) \\
 &\left. + \left( \frac{1}{2} S(S+1) + \frac{1}{2} \langle (S^z)^2 \rangle - \langle S^z \rangle^2 \right) \right)
 \end{aligned}$$

# Упругое магнитное рассеяние в ферромагнетике

$$\left( \frac{d\sigma}{d\Omega_f} \right)_{el} = (\gamma r_0)^2 |F(\mathbf{Q})|^2 e^{-2W} N \sum_{\chi\eta} \left( \delta_{\chi\eta} - \hat{Q}^\eta \hat{Q}^\chi \right) \sum_l e^{i\mathbf{Q}\mathbf{R}_l} \langle S_0^\chi \rangle \langle S_l^\eta \rangle$$

$$\langle S_l^z \rangle = \langle S^z \rangle \quad \langle S_l^x \rangle = \langle S_l^y \rangle = 0$$

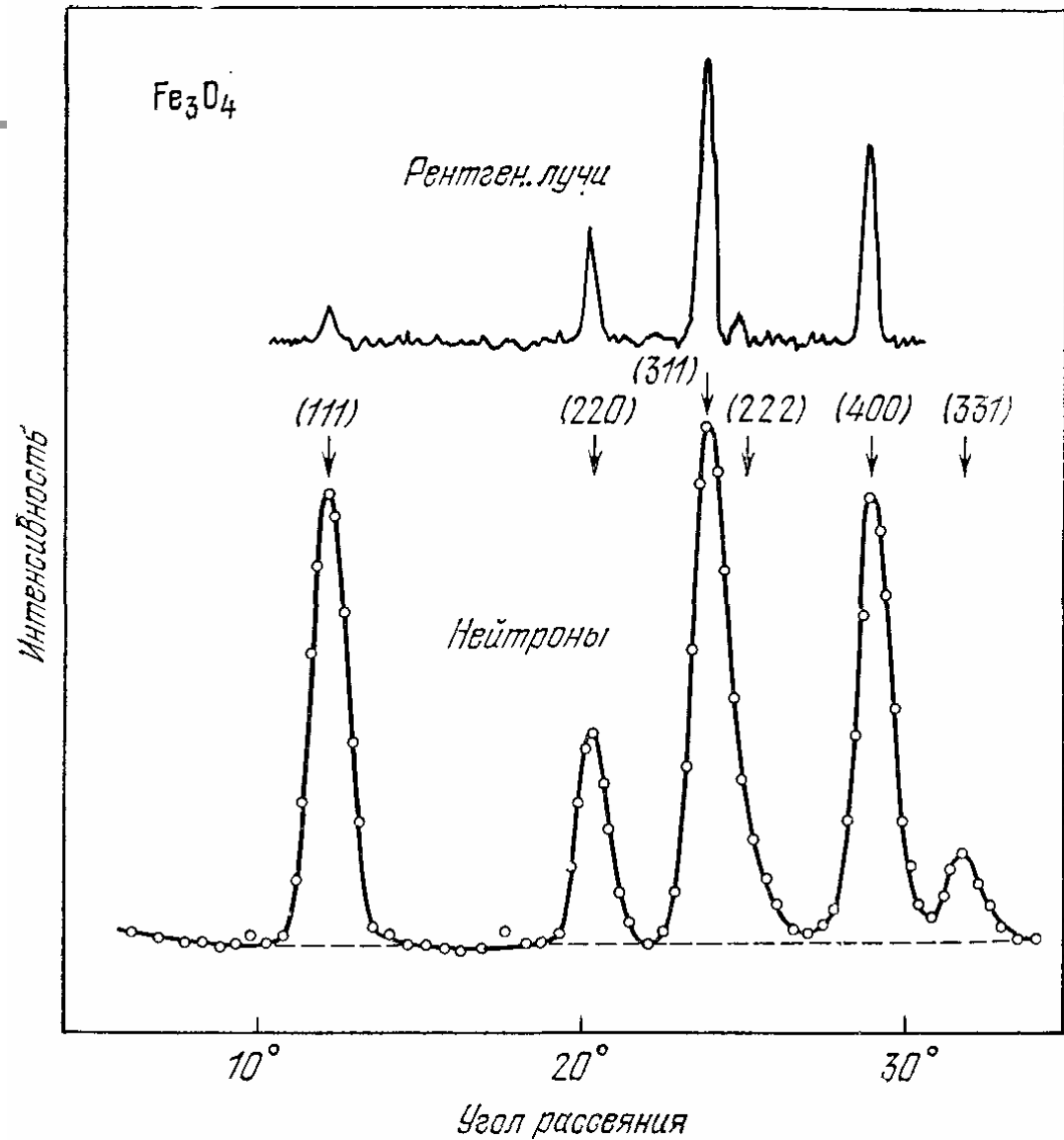
$$\left( \frac{d\sigma}{d\Omega_f} \right)_{el} = (\gamma r_0)^2 |F(\mathbf{Q})|^2 e^{-2W} N \left( 1 - (\hat{Q}^z)^2 \right) \langle S^z \rangle^2 \sum_l e^{i\mathbf{Q}\mathbf{R}_l}$$

$$\left( \frac{d\sigma}{d\Omega_f} \right)_{el} = (\gamma r_0)^2 |F(\mathbf{Q})|^2 e^{-2W} N \left( 1 - (\hat{Q}^z)^2 \right) \langle S^z \rangle^2 \frac{(2\pi)^3}{V_0} \sum_{\boldsymbol{\tau}} \delta(\mathbf{Q} - \boldsymbol{\tau})$$

$$\left( \frac{d\sigma}{d\Omega_f} \right)_{el} = (\gamma r_0)^2 N \langle S^z \rangle^2 \frac{(2\pi)^3}{V_0} \sum_{\boldsymbol{\tau}} e^{-2W} |F(\boldsymbol{\tau})|^2 \left( 1 - (\hat{\boldsymbol{\tau}}^z)^2 \right) \delta(\mathbf{Q} - \boldsymbol{\tau})$$



# $\text{FeO} \cdot \text{Fe}_2\text{O}_3$ ферритмагнетик





# Упругое магнитное рассеяние в зонном ферромагнетике

$$\left( \frac{d\sigma}{d\Omega_f} \right)_{el} = \left( \frac{\gamma r_0}{2\mu_B} \right)^2 \left| \left[ \hat{\mathbf{Q}} \times \left[ \langle \mathbf{M}(\mathbf{Q}) \rangle \times \hat{\mathbf{Q}} \right] \right] \right|^2$$

$$\langle \mathbf{M}(\mathbf{Q}) \rangle = \left\langle \int \mathbf{M}(\mathbf{r}) e^{i\mathbf{Q}\mathbf{r}} d\mathbf{r} \right\rangle = \mathcal{F}(\mathbf{Q}) \sum_l \langle e^{i\mathbf{Q}\mathbf{R}_l} \rangle$$

$$\mathcal{F}(\mathbf{Q}) = \int_{\text{cell}} \langle \mathbf{M}(\mathbf{r}) \rangle e^{i\mathbf{Q}\mathbf{r}} d\mathbf{r} \quad \langle \mathbf{M}(\mathbf{r}) \rangle = \frac{1}{V_0} \sum_{\tau} \mathcal{F}(\boldsymbol{\tau}) e^{-i\boldsymbol{\tau}\mathbf{r}}$$

$$\sum_{l'} \langle e^{-i\mathbf{Q}\mathbf{R}_{l'}} \rangle \langle e^{i\mathbf{Q}\mathbf{R}_l} \rangle = N \frac{(2\pi)^3}{V_0} e^{-2W} \sum_{\tau} \delta(\mathbf{Q} - \boldsymbol{\tau})$$

$$\left( \frac{d\sigma}{d\Omega_f} \right)_{el} = \left( \frac{\gamma r_0}{2\mu_B} \right)^2 N \frac{(2\pi)^3}{V_0} \sum_{\tau} e^{-2W} \delta(\mathbf{Q} - \boldsymbol{\tau}) \left| \left[ \hat{\boldsymbol{\tau}} \times \left[ \mathcal{F}(\boldsymbol{\tau}) \times \hat{\boldsymbol{\tau}} \right] \right] \right|^2$$